Exercice - M0283C

Soit $u, v, w \in \mathbb{U}$ tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u = jv = j^2 w$ ou $u = jw = j^2 v$.

$$u+v+w=0$$

Les nombres ont pour module 1, ils sont donc non nuls ce qui autorise la division par u. Donc

$$1+\frac{v}{u}+\frac{w}{u}=0$$

Posons

$$\frac{v}{u}=x+iy \qquad \frac{w}{u}=x'+iy'$$

Il vient

$$1+x+x'=0 \qquad y+y'=0$$

Les modules sont égaux à 1 donc

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2=x'^2+(-y)^2=1 \implies x=x' \text{ ou } x=-x'$$

La cas $x=-x'$ ne convient pas en effet, on aurait

$$1+x+x'=1+0=1$$

Donc nous avons

$$x=x' \qquad \text{et} \qquad y=-y'$$

Autrement dit

$$\frac{v}{u}=\overline{\frac{w}{u}}$$

On en déduis

$$1+2x=0 \qquad x^2+y^2=1$$

d'ou

$$x=-\frac{1}{2} \qquad y^2\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \implies y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et finalement

$$\frac{v}{u}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j \qquad \text{et} \qquad \frac{w}{u}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2$$

ou

$$\frac{v}{u}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{w}{u}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j$$

Conclusion :

$$v=ju \qquad w=j^2u \qquad \text{ou} v=j^2 \qquad w=ju$$

La réciproque est immédiate. Si $v=ju$ et $w=j^2u$ on a

$$u+v+w=u+ju+j^2u=u(1+j+j^2)=0$$

De même si $v=j^2u$ et $w=ju$ on a

$$u+v+w=u+j^2u+ju=u(1+j^2+j)=u(1+j+j^2)=0$$

Note : on aurait aussi pu utiliser les exponentielles complexes tels que

$$u=e^{i\theta_u} \qquad v=e^{i\theta_v} \qquad w=e^{i\theta_v}$$