

**Exercice - M0295C**

$E$  est un ensemble,  $A$  et  $B$  sont des éléments de  $\mathcal{P}(E)$ .  $\star$  est une loi de composition interne sur  $\mathcal{P}(E)$  définie par :

$$A \star B = \overline{A \cup B}$$

Nous avons immédiatement

$$A \star A = \overline{A \cup A} = \bar{A}$$

d'où l'expression du complémentaire

$$\bar{A} = A \star A$$

Nous en déduisons

$$A \cup B = \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A \star B} = (A \star B) \star (A \star B)$$

d'où l'expression de l'union

$$A \cup B = (A \star B) \star (A \star B)$$

Nous avons la relation

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

et donc

$$A \cap B = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = \overline{\overline{A \cup B}} = \bar{A} \star \bar{B} = (A \star A) \star (B \star B)$$

d'où l'expression de l'intersection

$$A \cap B = (A \star A) \star (B \star B)$$

Conclusion :

$A \cup B = (A \star B) \star (A \star B) \quad A \cap B = (A \star A) \star (B \star B) \quad \bar{A} = A \star A$
---