

### Exercice - M0298

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels  $(a; b)$  vérifiant la relation

$$(E) \quad a^2 - 250507 = b^2$$

1. Soit  $X$  un entier naturel.
  - a) Donner dans un tableau, les restes possibles de  $X$  modulo 9; puis ceux de  $X^2$  modulo 9.
  - b) Sachant que  $a^2 - 250507 = b^2$ , déterminer les restes possibles modulo 9 de  $a^2 - 250507$ ; en déduire les restes possibles modulo 9 de  $a^2$ .
  - c) Montre que les restes possibles modulo 9 de  $a$  sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple  $(a; b)$  vérifie la relation  $(E)$ , alors  $a \geq 501$ . Montrer qu'il n'existe pas de solution du type  $(501; b)$ .
3. On suppose que le couple  $(a; b)$  vérifie la relation  $(E)$ .
  - a) Démontrer que  $a$  est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
  - b) Déterminer le plus petit entier naturel  $k$  tel que le couple  $(505 + 9k; b)$  soit solution de  $(E)$ , puis donner le couple solution correspondant.
4.
  - a) Soit  $N$  un entier naturel tel que  $N = a^2 - b^2$  ou  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels. Montrer que  $N$  peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels  $p$  et  $q$ .
  - b) Déterminer une écriture de 250507 en un produit de deux facteurs. On en déduit alors que 250507 est divisible par un entier naturel autre que 1 et lui-même et donc que 250507 n'est pas premier.