**Exercice - M0298C**

On se propose de cherche des couples d'entiers naturels $(a;b)$ vérifiant la relation

$$(E) \qquad a^2 - 250507 = b^2$$

**1)** $X$ est un entier naturel.

**1a)** Les restes possible de $X$ modulo 9, autrement les restes de la division euclidienne de $X$ par 9 sont les entiers compris entre 0 et 8. Le reste de la division est en effet strictement inférieur au diviseur.

Nous avons par ailleurs, compte tenu de compatibilité de la relation de congruence avec les opérations d'addition et de multiplication

$$X \equiv r \pmod 9 \implies X^2 \equiv r^2 \pmod 9$$

Nous en déduisons le tableau suivant

| Restede $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Restede $X^2$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 7 | 7 | 0 | 4 | 1 |

**b)** Les restes possibles pour un carré sont d'après la question précedente : $0, 1, 4$ ou $7$. Par ailleurs

$$250507 = 9 \times 27834 + 1$$

donc

$$250507 \equiv 1 \pmod 9$$

Nous avons

$$a^2 = b^2 + 250507$$

donc les restes possible pour $a^2$ sont 1,2,5 et 8. Mais $a^2$ est un carré donc le seul reste possible est 1 ! Nous pouvons conclure

$$a^2 - 250507 = b^2 \implies a^2 \pmod 1$$

**c)** En se reportant au tableau de la quesiton 1a), on en déduit que $a$ est congru à 1 ou à 8.

**2)** Montrons que si $(a;b)$ vérifie $(E)$ alors $a \geq 501$.

$$a^2 - 250505 = b^2 \implies a^2 = 250507 + b^2 \implies a^2 \geq 250507 \implies a \geq \sqrt{250507}$$

Nous avons par ailleurs

$$500^2 = 250000 \qquad 501^2 = 251001$$

donc

$$500 \leq \sqrt{250507} \leq 501$$

$a$ étant un entier naturel, nous pouvons conclure

$$a \geq 501$$

Les couples de la forme $(501;b)$ ne peuvent être solution. En effet, a alors

$$501^2 - 250507 = 251001 - 250507 = 494$$

494 n'est pas un carré, en effet

$$22^2 = 484 < 494 < 23^2 = 529$$

Conclusion : $a \geq 501$ et les couples de la forme $(501;b)$ ne sont pas solution.

**3)** On suppose que le couple $(a;b)$ vérifie la relation $(E)$.

**a)** Montrons que $a$ est congru à 503 ou à 505 modulo 9. Nous avons

$$503 \equiv 8 \pmod 9 \qquad 505 \equiv 1 \pmod 9$$

et par symétrie de la relation de congruence

$$8 \equiv 503 \pmod 9 \qquad 1 \equiv 505 \pmod 9$$

D'apès la question 1c), nous avons

$$a \equiv 1 \pmod 9 \qquad \text{ou} \qquad a \equiv 8 \pmod 9$$

La transitivité de la relation de congruence permet de conclure

$$a \equiv 1 \pmod 9 \text{ et } 1 \equiv 505 \pmod 9 \implies a \equiv 505 \pmod 9$$

$$a \equiv 8 \pmod 9 \text{ et } 8 \equiv 503 \pmod 9 \implies a \equiv 503 \pmod 9$$

Conclusion :

$$a \equiv 503 \pmod 9 \qquad \text{ou} \qquad a \equiv 505 \pmod 9$$

**b)** Recherchons le plus petit entier $k$ tel que $(505 + 9k; b)$ soit solution. Autrement on recherche les valeurs de $k$ tels que

$$(505 + 9k)^2 - 250507 = b^2$$

Pour $k = 0$

$$505^2 - 250507 = 255025 - 250507 = 4518$$

On a

$$67^2 < 4518 < 68^2$$

et donc $(505 + 9k)^2 - 250507$ n'est pas le carré d'un entier.

Pour $k = 1$

$$(505 + 9 \times 1)^2 - 250507 = 514^2 - 250507 = 264196 - 250507 = 13689 = 117^2$$

C'est un carré. La plus petit valeur de $k$ est donc 1. On en déduit le couple de solution correspondant

$$a = 505 + 9 \times 1 = 514 \qquad b = \sqrt{(505 + 9 \times 1)^2 - 250507} = 117$$

Conclusion : le couple $(514; 117)$ est solution et vérifie la relation $(E)$.

**4)** Soit $N$ un entier naturel tel que $N = a^2 - b^2$

**a)** En utilisant la troisième identité remarquable on a immédiatement

$$N = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$a - b$ et $a + b$ sont deux entiers, donc en posant $p = a - b$ et $q = a + b$, on a $N = pq$.

**b)** Soit $(a; b)$ un couple de solution de la relation $(E)$. Nous avons alors

$$a^2 - 250507 = b^2 \implies 250507 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

En utilisant le couple trouvé à la question $4b$) à savoir $(514; 117)$ nous avons

$$250507 = (514 - 117)(514 + 117) = 397 \times 631$$

Conclusion : 250507 n'est pas un nombre premier. En effet $250507 = 397 \times 631$. Pas simple de trouver une telle décomposition en facteurs premiers...