Exercice - M0299C

Considérons les éléments suivants :

- Une sphère de centre O et de rayon R.
- Un axe de symétrie Δ de la sphère, c'est-à-dire une droite passant par le centre de la sphère.
- N et S les points d'intersection de la sphère et de l'axe, autrement dit les pôles nord et sud.
- Le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à l'axe passant par le centre de la sphère c'est-à-dire le plan équatorial
- L'inteserction de la sphère et du plan. C'est un grand cercle appelé équateur.
- Un grand cercle passant par les pôles.
- G le point d'intersection du grand cercle et de l'équateur.
- On appelle méridien un grand cercle passant par les pole.
- On appelle parallèle un cercle interction d'un plan perpendiculaire à l'axe et de la sphère.

Considérons un point M sur la sphère, et le grand cercle passant par M et par les pôles. Appelons L, le point d'intersection de ce grand cercle et de l'équateur, le plus proche de G. On appelle :

- Longitude l'angle $\widehat{GOL}$ et on la note λ_M
- Latitude l'angle $\widehat{LOM}$ et on la note α_M

Ces rappels de géographie nous seront utils plus loin.

1) Soit α la latitude commune des points A et B. Le rayon du parallèle passant par A et B est

$$R_\alpha = R\cos\alpha$$

Le chemin pour passer de A à B en suivant le parallèle est un arc de cercle d'angle $\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B$. Nous en déduisons la distance en suivant le parallèle qui est la longueur de l'arc $\widehat{AB}$.

$$\widehat{AB} = \frac{|\lambda_A - \lambda_B|}{360} 2\pi R_\alpha = \frac{|\lambda_A - \lambda_B|}{360} 2\pi R\cos\alpha$$

Soit numériquement, pour la distance Paris Vancouver nous avons :

$$d = \frac{2-(-123)}{360} \times 2 \times \pi \times 6380\cos(49) = \frac{125}{180}\pi \times 6380\cos(49) = 9\ 131 \text{ km}$$

2) Recherchons à présent la plus courte distance entre Paris et Vancouver, c'est-à-dire cette fois la longeur de l'arc $\widehat{AB}$ en suivant un arc de grand cercle. La solution proposée s'appuie sur le fait que les deux villes sont à la même latitutde. Reprenons deux point A et B à la même latitutde. Considérons à nouveau, l'arc de cercle $\widehat{AB}$ comme partie du paralllèle passant par A et B et calculons la corde AB de ce cercle. Nous avons la relation

$$\sin\frac{\Delta\lambda}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{R_\alpha} = \frac{AB}{2R_\alpha} \implies AB = 2R_\alpha \sin\frac{\Delta\lambda}{2} = 2R\cos\alpha\sin\frac{\Delta\lambda}{2}$$

Nous pouvons également exprimer la distance AB comme corde d'un grand cercle en fonction de l'angle $\theta = \widehat{AOB}$. On a alors

$$AB = 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

En rapprochant les deux égalités il vient

$$2R\sin\frac{\theta}{2} = 2R\cos\alpha\sin\frac{\Delta\lambda}{2} \implies \sin\frac{\theta}{2} = \cos\alpha\sin\frac{\Delta\lambda}{2}$$

et finalement

$$\theta = 2\arcsin\left(\cos\alpha\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\right)$$

L'angle étant déterminé, nous pouvons calculer la longueur de l'arc de grand cercle correspondant

$$\widehat{AB} = \theta R = \frac{\theta}{360} \times 2\pi R$$

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi R}{360} \times 2 \arcsin\left(\cos\alpha \sin\frac{\Delta\lambda}{2}\right)$$

Numériquement nous obtenons

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi \times 6380}{360} \times 2 \arcsin\left(\cos(49) \sin\left(\frac{125}{2}\right)\right) = 7\ 925\text{km}$$

3) Abordons maintenant le cas plus général de deux villes qui ne sont pas située à la même lattitude. Considérons deux points A et B. A de latitude α_A et de longitude λ_A, B de latitude α_B et de longitude λ_B. La plus courte distance entre ces deux villes sera la longueur de l'arc de grand cercle passant par A et B. Nous devons donc calculer l'angle au centre de cette portion de grand cercle, l'angle $\widehat{AOB}$ noté θ. Cet angle est accessible par le produit scalaire. En effet

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \cos\widehat{AOB} = R^2 \cos\theta$$

Nous aurons donc

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{R^2}\right)$$

Calculons les coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} R\cos\alpha_A \cos\lambda_A \\ R\cos\alpha_A \sin\lambda_A \\ R\sin\alpha_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} R\cos\alpha_B \cos\lambda_B \\ R\cos\alpha_B \sin\lambda_B \\ R\sin\alpha_B \end{pmatrix}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= R\cos\alpha_A \cos\lambda_A R\cos\alpha_B \cos\lambda_B + R\cos\alpha_A \sin\lambda_A R\cos\alpha_B \sin\lambda_B + R\sin\alpha_A R\sin\alpha_B \\ &= R^2(\cos\alpha_A \cos\alpha_B(\cos\lambda_A \cos\lambda_B + \sin\lambda_A \sin\lambda_B) + \sin\alpha_A \sin\alpha_B) \\ &= R^2(\cos\alpha_A \cos\alpha_B \cos(\lambda_A - \lambda_B) + \sin\alpha_A \sin\alpha_B) \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\cos\theta = \cos\alpha_A \cos\alpha_B \cos(\lambda_A - \lambda_B) + \sin\alpha_A \sin\alpha_B$$

et finalement

$$\theta = \arccos(\cos\alpha_A \cos\alpha_B \cos(\lambda_A - \lambda_B) + \sin\alpha_A \sin\alpha_B)$$

Puis la longueur de l'arc $\widehat{AB}$

$$\widehat{AB} = \theta R = \frac{\theta^\circ}{360} \times 2\pi R$$

$$\widehat{AB} = \frac{\arccos(\cos\alpha_A \cos\alpha_B \cos(\lambda_A - \lambda_B) + \sin\alpha_A \sin\alpha_B)}{360} \times 2\pi R$$

Numériquement nous obtenons

$$\text{Paris } : \lambda_A = 2^\circ \quad \alpha_A = 49^\circ \qquad \text{Tokyo } : \lambda_B = 139,75^\circ \quad \alpha_B = 35^\circ$$

$$\cos\theta = \cos(49)\cos(35)\cos(139,75 - 2) + \sin(49)\sin(35) \implies \theta = 87,98^\circ$$

$$\widehat{AB} = \frac{88}{360} \times 2 \times 3,1415 \times 6380 = 9\ 799 \text{ km}$$

Remarque : les distances peuvent varier en fonction de la valeur du rayon terrestre retenu et de la précision des latitudes et longitudes. Ainsi pour paris une latitude de 48,8° serait plus correcte de même qu'une longitude de 2,3°.