Exercice - M0301

Jérôme Cardan (1501-1576) a fourni, dans son ouvrage « *Ars Magna* », une formule qui donne une solution α de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

dans le cas ou $4p^3 + 27q^2 \geq 0$.

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

Partie 1

On considère l'équation

$$x^3 - 36x - 91 = 0$$

1. Calculer α et vérifier que c'est bien une solution de l'équation
2. Factoriser le polynome $P(x) = x^3 - 36x - 91$
3. Terminer la résolution de l'équation

Partie 2

On considère l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

1. Calculer $4p^3 + 27q^2$. Peut-on appliquer la formule de Cardan ?
2. Etudier la fonction $Q(x) = x^3 - 15x - 4$ et en déduire le nombre de solutions de l'équation $Q(x) = 0$.
3. Pour résoudre cette équation malgré le problème posé par la racine négative, Cardan poursuit le calcul en utilisant des racines négative. Faite comme lui !
   a) Ecrire $\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4}$ sous la forme $\lambda\sqrt{-1}$ avec λ réel positif et déterminer λ
   b) Ecrire α en fonction de $\lambda\sqrt{-1}$
   c) Calculer $(2 + \sqrt{-1})^3$ et $(2 - \sqrt{-1})^3$
   d) En déduire la valeur de α.
   e) Vérifier que la valeur trouvée est bien une solution.
4. Factoriser le polynome $Q(x) = x^3 - 15x - 4$.
5. Achever la résolution de l'équation.

Question subsidiaire : d'ou sort le $(2 + i)$ et le $(2 - i)$ proposé, valeurs un peut sorties du chapeau ?

Source : Les exemples et les calculs suivent l'activité 1 « Des nombres réels aux nombres imaginaires » du manuel Transmath Terminale S de chez Nathan.

La querelle Fontana et Cardan

Au XVIe siècle, les mathématiciens se défiaient lors de concours mathématiques publics, au cours desquels ils montraient leur habileté. Ils avaient ainsi pour habitude de garder secrètes leurs découvertes.

Au cour de l'un de ces concours, le mathématicien Niccolo Fontana dit Tartaglia (« Le bègue ») (1499-1557) trouva en 1534 une méthode générale pour résoudre les équations du type $x^3 + px + q = 0$. Il semble qu'il ait été le premier à utiliser pour cela la racine carré d'un nombre négatif. Il garda sa méthode secrète, mais accepta de la dévoiler à Cardan, à la condition que celui-ci la garde secrète.

Cardan développa la méthode de Fontana et réussit à l'étendre à toute équation du 3eme degré et du 4eme degré (avec son assistant Ferrari). Apprenant que la méthode de Fontana avait été découverte avant celui-ci par Scipionne del Ferro, il passa outre sa promesse et publia ces résultats dans son « *Ars magna* »(1545).

Dans « *Quesiti et invenzioni divers* »(1546), Fontana attaqua violemment Cardan ; il s'ensuivit une longue querelle avec Cardan et Ferrari. Celle-ci pris fin au cours d'un concours entre Fontana et Ferrari, que Ferrari gagna. C'est finalement le nom de Cardan qui resta associé à cette méthode de résolution.