Exercice - M0301C

Partie 1

On se propose de résoudre l'équations suivante :

$$x^3 - 36x - 91 = 0$$

1) La formule de Cardan fourni une solution de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

Appliquons donc cette formule pour déterminer une solution de l'équation proposée.

$$x^3 - 36x - 91 = 0$$

Nous avons $p = -36$ et $q = -91$. D'ou

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt[3]{-\frac{-91}{2} + \sqrt{\frac{(-36)^3}{27} + \frac{(-91)^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{-91}{2} - \sqrt{\frac{(-36)^3}{27} + \frac{(-91)^2}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{91}{2} + \sqrt{\frac{-46656}{27} + \frac{(8281)}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{91}{2} - \sqrt{\frac{-46656}{27} + \frac{(8281)}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{91}{2} + \sqrt{-1728 + \frac{8281}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{91}{2} - \sqrt{-1728 + \frac{8281}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{91}{2} + \sqrt{\frac{-6912 + 8281}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{91}{2} - \sqrt{\frac{-6912 + 8281}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{91}{2} + \sqrt{\frac{1369}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{91}{2} - \sqrt{\frac{1369}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{91}{2} + \frac{37}{2}} + \sqrt[3]{\frac{91}{2} - \frac{37}{2}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{128}{2}} + \sqrt[3]{\frac{54}{2}} \\
&= \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{27} \\
&= 4 + 3 \\
&= 7
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\alpha = 7}$$

On vérifie aisément que 7 est bien solution.

$$7^3 - 36 \times 7 - 91 = 343 - 252 - 91 = 0$$

2 Factorisons le polynome $x^3 - 36x - 91$. 7 est solution de l'équation donc, nous pouvons mettre $(x - 7)$ en facteur et donc rechercher b et c tels que

$$\begin{aligned}
x^3 - 36x - 91 &= (x - 7)(x^2 + bx + c) \\
&= x^3 + bx^2 + cx - 7x^2 - 7bx - 7c \\
&= x^3 + (b - 7)x^2 + (c - 7b)x - 7c
\end{aligned}$$

Par identification on a immédiatement $b - 7 = 0$ et $-7c = -91$ d'ou $b = 7$ et $c = 13$. D'ou la factorisation du polynome.

$$x^3 - 36x - 91 = (x - 7)(x^2 + 7x + 13)$$

3) La forme factorisée conduit à une équation produit nul et permet de terminer aisément la résolution.

$$\begin{aligned} x^3 - 36x - 91 = 0 &\iff (x-7)(x^2+7x+13) = 0 \\ &\iff x - 7 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + 7x + 13 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation du second degré est

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 13 = 49 - 52 = -3$$

Cette équation n'a pas de solutions. On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation

$$\boxed{x^3 - 36x - 91 = 0 \qquad S = \{7\}}$$

Partie 2

Considérons l'équation :

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

1) Donc ici nous avons $p = -15$ et $q = -4$. Calculons

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = \frac{4p^3 + 27q^2}{108} = \frac{4 \times (-15)^3 + 27 \times (-4)^2}{108} = \frac{-4 \times 3375 + 27 \times 16}{108} = \frac{-13500 + 432}{108} = -121$$

Nous ne pouvons donc calculer la racine carrée de cette quantité. La formule de Cardan n'est pas applicable.

2) Pourtant cette équation a des solutions. En effet, considérons la fonction

$$f(x) = x^3 - 15x - 4$$

Dérivons

$$f'(x) = 3x^2 - 15$$

et donc

$$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{5} \qquad \text{ou} x = -\sqrt{5}$$

Calculons

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{5}) &= (-\sqrt{5})^3 - 15 \times (-\sqrt{5}) - 4 = 10\sqrt{5} - 4 \\ f(\sqrt{5}) &= (\sqrt{5})^3 - 15 \times (\sqrt{5}) - 4 = -10\sqrt{5} - 4 \end{aligned}$$

On a le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$10\sqrt{5} - 4$	$\searrow$	$-10\sqrt{5} - 4$	$\nearrow$	

L'équation a donc trois solutions comme le montre clairement le tableau de variation (utiliser le théorème des valeurs intermédiares pour une démonstration en bonne et due forme).

3) Reprenons donc le calcul de la solutions de Cardan, comme si on pouvait... en écrivant sans $\sqrt{-1}$ (bon ok c'est mal, on ne le fera que dans ce document)

$$\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} = \sqrt{-121} = \sqrt{11^2 \times (-1)} = 11\sqrt{-1}$$

La racine proposée par Cardan s'écrit donc

$$X = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - 11\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

On montre que

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2+11\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad (2-\sqrt{-1})^3 = 2-11\sqrt{-1}$$

En effet,

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3\times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3\times 2\times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2+11\sqrt{-1}$$

$$(2-\sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3\times 2^2 \times(-\sqrt{-1}) + 3\times 2\times(-\sqrt{-1})^2 + (-\sqrt{-1})^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2-11\sqrt{-1}$$

Donc

$$X = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-1})^3} = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$$

On vérifie aisément que la valeur trouvée est bien une solution de l'équation

$$4^3 - 15\times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$$

On peut donc factoriser par $(x-4)$. Il vient

$$x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2+bx+c) = x^3 + (b-4)x^2 + (c-4b)x - 4c$$

et par identification on a immédiatement $b=4$ et $c=1$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \iff (x-4)(x^2+4x+1) = 0 \iff x = 4 \quad \text{ou} \qquad x^2+4x+1 = 0$$

Pour l'équation du second degré, le discriminant est

$$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 1 = 12 = 4\times 3 = (2\sqrt{3})^2$$

Donc les solutions sont

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{12}}{2} = -2-\sqrt{3} \qquad x_2 = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2+\sqrt{3}$$

Conclusion : l'équation a bien trois solutions

$$S = \{-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3} : 4\}$$

Question subsidiaire

Considérons un nombre de la forme $a+\sqrt{-1}b$. Recherchons une racine cubique, c'est-à dire un nombre z tel que $z^3 = a+\sqrt{-1}b$. Recherchons ce nombre sous la forme $x+\sqrt{-1}y$. Nous avons donc

$$(x+\sqrt{-1}y)^3 = a+\sqrt{-1}b$$

$$x^3 + 3x^3\sqrt{-1}y + 3x(\sqrt{-1}y)^2 + (\sqrt{-1}y)^= a+\sqrt{-1}b$$

$$x^3 + 3\sqrt{-1}x^2y - 3xy^2 - \sqrt{-1}y^3 = a+\sqrt{-1}b$$

$$(x^3-3xy^2) + \sqrt{-1}(3x^2y - y^3) = a+\sqrt{-1}b$$

et finalement

$$(x+\sqrt{-1}y)^3 = a+\sqrt{-1}b \iff \begin{cases} x^3-3xy^2 = a \\ 3x^2y - y^3 = b \end{cases}$$

Sous cette forme, la résolution n'est pas simple. La méthode par sustitution, conduit a une équation de degré élevé...

Considérons les quantités a^2+b^2 et x^2+y^2 et enfin X^2+Y^2 avec

$$X = x^3 - 3xy^2 \qquad Y = 3x^2y - y^3$$

$$\begin{aligned}X^2 + Y^2 &= (x^3 - 3xy^2)^2 + (3x^2y - y^3)^2\\ &= x^6 - 6x^4y^2 + 9x^2y^4 + 9x^4y^2 - 6x^3y^4 + y^6\\ &= x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6\\ &= (x^2 + y^2)^3\end{aligned}$$

Nous avons évidement $X^2 + Y^2 = a^2 + b^2$ donc, nous obtenons

$$X^2 + Y^2 = a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^3$$

autrement dit

$$x^2 + y^2 = \sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

Cette nouvelle relation permet de transformer le système puisque $y^2 = \sqrt[3]{a^2 + b^2} - x^2$. Il vient alors

$$x^3 - 3x(\sqrt[3]{a^2 + b^2} - x^2) = a$$

et finalement

$$4x^3 - 3\sqrt[3]{a^2 + b^2}x - a = 0$$

On retombe sur une équation du troisième degré :-(... On n'avance pas vraiment. Ceci étant, dans le cas qui nous préoccupe nous avons $a = 2$ et $b = 11$ d'ou

$$\sqrt[3]{a^2 + b^2} = \sqrt[3]{2^2 + 11^2} = \sqrt[3]{4 + 121} = \sqrt[3]{125} = 5$$

On aboutit à l'équation

$$4x^3 - 15x - 2 = 0$$

2 est racine évidente, quelle chance ! On en déduit la valeur de y

$$x^3 - 3xy^2 = 2 \implies 2^3 - 3 \times 2 \times y^2 = 2 \implies 6y^2 = 6 \implies y^2 = 1$$

Donc $y = 1$ ou $y = -1$. Il convient de vérifier que les solutions trouvées sont bien des solutions. La première équation est évidement satisfaite. Pour le couple $(2; 1)$ la deuxième équation donne :

$$3x^2y - y^3 = 3 \times 2^2 \times 1 - 1^3 = 11$$

Le couple $x = 2$ et $y = 1$ est bien solution et donc $2 + \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 + 11\sqrt{-1}$. Faison de même pour le couple $(2; -1)$.

$$3x^2y - y^3 = 3 \times 2^2 \times (-1) - (-1)^3 = -12 + 1 = -11$$

Ce n'est pas une solution. En revanche $2 - \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 - 11\sqrt{-1}$