Exercice - M0302

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère (E) l'équation d'inconnue complexe z suivante :

$$z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i = 0 \qquad (E)$$

1. Montrer que $2i$ est une solution de l'équation. Le conjugué de $2i$ est-il une solution de cette équation ?
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout complexe z :

$$z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i = (z-2i)(az^2 + bz + c)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

.

Partie B

On se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{)}$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i, z_B = 2i$ et $z_C = 2+2i$. On nomme f l'application qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$$

1. (a) Déterminer l'affixe du point C' image de C par f.
   (b) Placer les points C et C' dans repère orthonormé
2. (a) i. Vérifier que pour tout n ombre complexe z, on a : $z^2 + (-2-i)z + 2i = (z-2)(z-i)$.
   ii. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + (-2-i)z + 2i = 0$
   (b) Un point est dit invariant s'il est confondu avec son image. Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.
3. Montrer qu'il existe un unique point D tel que $f(D) = B$ dont on déterminera l'affixe.
4. On pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, x', y et y' sont réels.
   (a) Montrer que pour $z \neq 1+i$:

$$x' = \frac{x^2 - x + y^2 - 3y + 2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{-x-y+2}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

   (b) On considère $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
   i. Déterminer la nature de $\mathcal{E}$
   ii. Construire $\mathcal{E}$.
   (c) On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
   i. Déterminer la nature de $\mathcal{F}$.
   ii. Vérifier que le point B appartient à $\mathcal{F}$.
   iii. Placer le point B puis construire $\mathcal{F}$.