Exercice - M0302C

Partie A

On considère l'équation

$$P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i = 0 \qquad (E)$$

1) Montrons que $2i$ est solution. Calculons $P(2i)$.

$$P(2i) = (2i)^3 - (2+2i)(2i)^2 + (2+4i)2i - 4i = -8i + 8 + 8i + 4i - 8 - 4i = 0$$

$2i$ est bien solution.

$-2i$ n'est probablement pas solution. Les coefficients du polynome sont complexes et il n'y a aucune raison que si z_0 est racine $\bar{z}_0$ le soit aussi. La vérification est immédiate.

$$P(-2i) = (-2i)^3 - (2+2i)(-2i)^2 + (2+4i)(-2i) - 4i = 8i + 8 + 8i - 4i + 8 - 4i = 16 + 8i$$

2) $2i$ étant un zéro du polynome, nous pouvons mettre $(z - 2i)$ en facteur et donc rechercher une factorisation dela forme

$$P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$$

Développons cette expression. On obtient :

$$P(z) = a^3 + bz^2 + cz - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic = az^3 + (b - 2ia)z^2 + (c - 2ib)z - 2ic$$

Par identification des coeffeicients nous obtenons

$$a = 1 \qquad b - 2ia = -(2+2i) \qquad c - 2ib = 2 + 4i \qquad -2ic = -4i$$

D'ou les valeurs des coefficients a, b et c.

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 2$$

Conclusion

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2z + 2)$$

3) Résolvons l'équation (E)

$$z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i = 0 \iff (z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$$

On obtient une équation produit nul.

$$z = 2i \quad \text{ou} \quad z^2 - 2z + 2 = 0$$

Il reste à résoudre l'équation du second degré

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

Calculons le discriminant

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$

Δ est négatif, l'équation admet donc deux racines complexes conjuguées.

$$z_1 = \frac{-(-2) - 2i}{2 \times 1} = 1 - i \qquad z_1 = \frac{-(-2) + 2i}{2 \times 1} = 1 + i$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \{2i; 1 - i; 1 + i\}}$$

Partie B

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \qquad z_B = 2i \qquad z_C = 2 + 2i$$

et la f la fonction qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

$$z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$$

1a) Calculons l'image de C par f.

$$z'_C = \frac{z_C - 2i}{z_C - 1 - 1} = \frac{2 + 2i - 2i}{2 + 2i - 1 - i} = \frac{2}{1 + i} = \frac{2(1 - i)}{2} = 1 - i$$

Conclusion : le point C' image de C par f a pour affixe $z'_C = 1 - i$

1b) Voir le graphique en dernière page.

2a) Développons la forme factorisée proposée.

$$(z - 2)(z - i) = z^2 - iz - 2z + 2i = z^2 + (-2 - i)z + 2i$$

On en déduit les solutions de l'équation.

$$z^2 + (-2 - i)z + 2i = 0 \iff (z - 2)(z - i) = 0 \iff z == 2 \quad \text{ou} \quad z = i$$

Conclusion : les solutions sont $z_1 = 2$ et $z_2 = i$.

2b) Recherchons les points invariants de f, c'est-à-dire les points dont l'affixe vérifie l'équation

$$z = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$$

La résolution est immédiate.

$$z = \frac{z - 2i}{z - 1 - i} \iff z \neq 1 + i \quad \text{et} \quad z^2 - z - iz - z + 2i = 0$$

Les points invariants sont donc les solutions de l'équation

$$z^2 + (-2 - i)z + 2i = 0$$

Conclusion : il y a deux points invariants dont les affixes sont i et 2.

3) Recherchons les antécédants de B, donc les points dont l'affixe est solution de l'équation :

$$\frac{z - 2i}{z - 1 - i} = z_B = 2i$$

Equation qui se ramène à

$$z - 2i = 2iz - 2i + 2 \iff (1 - 2i)z = 2 \iff z = \frac{2}{1 - 2i} = \frac{2 + 4i}{5}$$

Conclusion : le point D d'affixe $z_D = \dfrac{2 + 4i}{5}$ est l'unique point tel que $f(D) = B$.

4) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

4a) Calculons les parties réel et imaginaire de z'

$$
\begin{aligned}
z' &= \frac{z-2i}{z-1-i} \\
&= \frac{x+(y-2)i}{(x-1)+(y-1)i} \\
&= \frac{(x+(y-2)i)((x-1)-(y-1)i)}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x(x-1)+(y-2)(y-1)+i(-x(y-1)+(y-2)(x-1))}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2-x+y^2-3y+2+i(-xy+x+xy-y-2x+2)}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2-x+y^2-3y+2+i(-x-y+2)}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2-x+y^2-3y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2}+i\frac{(-x-y+2)}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\
&= x'+iy'
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$
x' = \frac{x^2-x+y^2-3y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2} \qquad y' = \frac{(-x-y+2)}{(x-1)^2+(y-1)^2}
$$

4b) On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réel. On a donc

$$
\Im z' = 0 \iff x+y-2=0
$$

(i) L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc une droite d'équation cartésienne $x+y-2=0$

(ii) Voir graphique en dernière page

4c) On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur. On a donc

$$
\Re z' = 0 \iff x^2-x+y^2-3y+2=0
$$

Transformons cette expressions. Il vient

$$
\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0
$$

et finalement

$$
\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}
$$

(i) L'ensemble $\mathcal{F}$ est donc un cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(ii) Montrons que le point B appartient à $\mathcal{F}$. On dispose de deux méthodes. On peut en premier lieux calculer l'affixe de l'image de B.

$$
z'_B = \frac{z_B-2i}{z_B-1-i} = \frac{2i-2i}{2i-1-i} = 0
$$

z'_B est un réel, et nous pouvons conclure que le point B appartient à $\mathcal{F}$. Alternativement, nous pouvons vérifier que les coordonnées du point B vérifient l'équation du cercle.

$$
\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}
$$

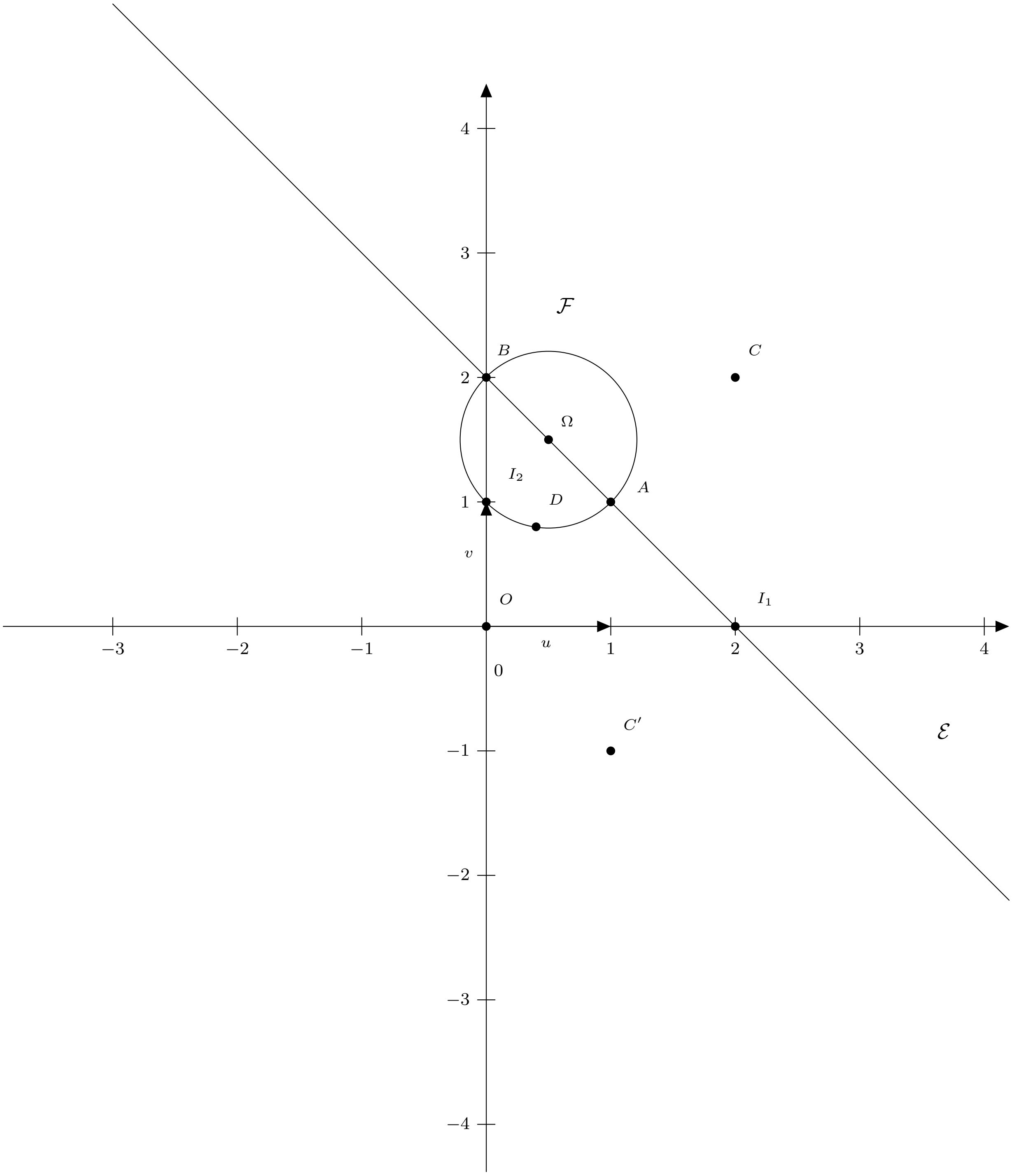

FIGURE 1 – Representation dans le plan Complexe