Exercice - M0303

Distance sur $\mathbb{R}$

Définition 1 *On appelle distance sur $\mathbb{R}$, toute application $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad d(x,y)=0 \iff x=y$

(ii) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad d(x,y)=d(y,z)$

(iii) $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

1. **a)** Montrer que $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad |d(x,y)-d(y,z)|\le d(x,z)$.
   b) Quel nom peut-on donner aux inégalités : $|d(x,y)-d(y,z)|\le d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$?
2. **a)** Montrer que $d\colon (x,y)\longrightarrow |x-y|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$.
   b) Plus généralement, montrer que si $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une application strictement monotone $d\colon (x,y)\longrightarrow |f(x)-f(y)|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad a+b\ge c \implies \dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}\ge\dfrac{c}{c+1}$
   b) En déduire que si d est une distance sur $\mathbb{R}$, il en est de même de : $d'\colon (x,y)\longrightarrow \dfrac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$
4. **Définitions** : Soit d, une distance sur $\mathbb{R}$
   (i) On appelle boule ouverte ce centre a, de rayon r, $(a\in\mathbb{R}, r\in\mathbb{R}^+)$, l'ensemble $\mathcal{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ d(a,x)<r\}$
   (ii) On appelle boule fermée ce centre a, de rayon r, $(a\in\mathbb{R}, r\in\mathbb{R}^+)$, l'ensemble $\mathcal{B}'(a,r)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ d(a,x)\le r\}$
   (iii) Une partie $\mathcal{O}$ est dite ouverte pour d si et seulement si elle possède la propriété suivante : $\forall a\in\mathbb{O},\ \exists r>0, \mathcal{B}(a,r)\subset\mathcal{O}$
   (iv) **Définition** : Une partie $\mathcal{F}$ est fermée pour d si et seulement si son complémentaire est ouvert pour d.

   a) Vérifier que l'on a bien muni ainsi $\mathbb{R}$ d'une structure topologique, c'est-à-dire que
   (i) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
   (ii) $\forall (\mathcal{O}_i)_{i\in I}$, famille d'ouverts de $\mathbb{R}$: $\displaystyle\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$
   (iii) $\forall n\in\mathbb{R}^\star, \forall \mathcal{O}_1,\mathcal{O}_1,\cdots,\mathcal{O}_n$ ouverts, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}\mathcal{O}_k$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   b) Vérifier qu'une boule ouverte $\mathcal{B}(a,r)$ est un ouvert pour d.
   c) Montrer qu'ue boule fermée est une partie fermée de $\mathbb{R}$ pour d.
5. **Définition** : Deux distances d et d' sur $\mathbb{R}$ sont dites équivalentes si et seulement si : $\exists k>0, \exists k'>0, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\colon k\cdot d(x,y)\le d'(x,y)\le k'\cdot d(x,y)$
   a) Montrer que les ouverts pour d sont les même que les ouverts pour d'
   b) Donner un exemple de distance non équivalentes sur $\mathbb{R}$
6. **Définition** : Soit d, un distance sur $\mathbb{R}$. On appelle **suite de Cauchy** pour d, toute suite (u_n) de réels vérifiant la propriété suivante :
   $$\forall\epsilon>0, \exists n_0 \quad (p\ge n_0, q\ge n_0) \implies d(u_p,u_q)<\epsilon$$
   a) Montrer que si d et d' sont deux distances équivalentes sur $\mathbb{R}$, les suites de Cauchy sont les mêmes pour d et d'.
   b) Que dire de $\mathbb{R}$, muni d'une distance équivalente à la distance $d\colon (x,y)\longrightarrow |x-y|$?