Exercice - M0303C

1a) Montrons que :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$
d est une distance donc vérifie
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad d(x,y) = d(y,x)$$
donc
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \implies d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$$
de la même façon
$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \implies d(y,z) - d(x,y) \leq d(x,z) \implies -(d(x,y) - d(y,z)) \leq d(x,z)$$
et donc
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$
Conclusion :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

1b) L'inégalité
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z) \leq d(x,y - +d(y,z)$$
peut être appelée inégalité triangulaire. La longueur d'un coté d'un triangle est comprise entre la somme et la différence des deux autres cotés.

2a) On définit l'application
$$d: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & |x-y| \end{array}$$
Montrons que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

(i) Nous avons $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$, d'après les propriétés de la fonction valeur absolue.

(ii) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ nous avons $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

(iii) Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ nous avons
$$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$$
Faut-il redémontrer la propriété pour la valeur absolue ?

Conclusion : la fonction d vérifie toutes les propriétés des distance et définit donc une distance sur $\mathbb{R}$.

2b) Soit f une fonction strictemet monotone. On définit l'application
$$d: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & |f(x) - f(y)| \end{array}$$
Montrons que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

(i) Nous avons $d(x,y) = 0 \iff |f(x) - f(y)| = 0 \iff f(x) = f(y)$, d'après les propriétés de la fonction valeur absolue. Or f est une fonction strictement monotone. Elle définit donc une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donc
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = f(y) \implies x = y$$
et donc
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad d(x,y) = 0 \implies x = y$$

La réciproque est triviale

$$x = y \implies f(x) = f(y) \implies f(x) - f(y) = 0 \implies |f(x) - f(y)| = 0 \implies d(x, y) = 0$$

et donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

Les deux autres propriétés se démontrent comme précédement.

(ii) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ nous avons $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y, x)$

(iii) Pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ nous avons

$d(x, z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x, y) + d(y, z)$

Conclusion :d est une distance sur $\mathbb{R}$.

3a) Soit a, b, c trois nombres réels. Montrons que

$$a + b \geq c \implies \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \geq \frac{c}{c+1}$$

Considérons la fonction réelle d'une variable réelle

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Dérivons

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

C'est donc une fonction croissante. Donc

$$a + b \geq c \implies f(a + b) \geq f(c)$$

$$f(a + b) \geq \frac{c}{c+1}$$

Comparons $f(a) + f(b)$ et $f(a + b)$

$$\begin{aligned}
f(a) + f(b) - f(a + b) = \\
&= \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{a+b}{a+b+1} \\
&= \frac{a(b+1)(a+b+1) + b(a+1)(a+b+1) - (a+1)(b+1)(a+b+1)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)} \\
&= \frac{a(a+1)(b+1) + ab(b+1) + b(a+1)(b+1) + ab(a+1) - (a+1)(b+1)(a+b) + 1}{(a+1)(b+1)(a+b+1))} \\
&= \frac{ab(b+1) + ab(a+1)}{(a+1)(b+1)(a+b+1))} \\
&= \frac{ab^2 + a^2b + 2ab}{(a+1)(b+1)(a+b+1))}
\end{aligned}$$

a et b étant positif, c'est manifestment positif et donc

$$f(a) + f(b) - f(a + b) \geq 0 \implies f(a) + f(b) \geq f(a + b) \geq f(c)$$

Conclusion

$$a + b \geq c \implies \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \geq \frac{c}{c+1}$$

3b) Soit d une distance, montrons que d' définie par :

$$\begin{array}{rccc} d' : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longrightarrow & \dfrac{d(x, y)}{d(x, y) + 1} \end{array}$$

Montrons que d' vérifie toutes les propriétés d'une distance.

$$\begin{aligned}
&(i) \quad d'(x,y) = 0 \iff \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1} = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y \\
&(ii) \quad d'(y,x) = \frac{d(y,x)}{d(y,x)+1} = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1} = d'(x,y) \\
&(iii) \quad d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \implies \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1} + \frac{d(y,z)}{d(y,z)+1} \geq \frac{d(x,z)}{d(x,z)+1} \\
&\qquad \implies d'(x,y) + d'(y,z) \geq d(x,z)
\end{aligned}$$

Conclusion : d' est une distance sur $\mathbb{R}$.

4) On définit les ensembles ouvert de la facon suivante : $\mathcal{O}$ est un ouvert si et seulement si pour tout a de $\mathcal{O}$, il existe un réel r tel que la boule de centre a et de rayon r soit incluse dans $\mathcal{O}$. ($\mathcal{B}(a,r) \subset \mathcal{O}$).

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie.

(i) $\mathcal{B}(0,0) \subset \emptyset$. Donc $\emptyset$ est un ouvert.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{B}(x,1) \subset \mathbb{R}$ donc $\mathbb{R}$ est un ouvert

(ii) Soit $\mathcal{O}_i$ une famille d'ouvert indexée sur un ensemble I. Montrons que la réunion des $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

Soit x un élément de $\mathcal{O}$. Montrons qu'il existe une boule ouverte de centre x incluse dans $\mathcal{O}$.

$$x \in \mathcal{O} \implies \exists i_0 \in I \quad x \in \mathcal{O}_I$$

$\mathcal{O}_{i_0}$ est un ouvert, donc il existes r tel que la boule $\mathcal{B}(x,r)$ soit incluse dans $\mathcal{O}_{i_0}$.

$$\mathcal{B}(x,r) \subset O_{i_0} \implies B(x,r) \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \implies B(x,r) \subset \mathcal{O}$$

Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

(iii) Soit n un entier naturel non nul est $(O_i)_{1 \leq i \leq n)}$ des ouverts de $\mathbb{R}$. Montrons que l'intersection de ces ouverts est un ouvert.

$$\mathcal{O} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$$

Soit x un élément de $\mathcal{O}$. Montrons qu'il existe une boule ouverte de centre x incluse dans $\mathcal{O}$.

$$x \in \mathcal{O} \implies \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \qquad x \in \mathcal{O}_i$$

Pour tout i, $\mathcal{O}_i$ est un ouvert, donc il existe r_i tel que $\mathcal{B}(x,r_i)$ soit inclu dans $\mathcal{O}_i$). Soit r le plus petit des r_i. Nous avons

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \qquad \mathcal{B}(x,r) \subset \mathcal{B}(x,r_i)$$

En effet

$$y \in \mathbb{B}(x,r) \implies d(x,y) < r \implies d(x,y) < r_i \implies x \in \mathcal{B}(x,r_i)$$

donc

$$\mathcal{B}(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$$

L'intersection des $\mathcal{O}_i$ est donc un ouvert.

Conclusion : $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts pour d est une topologie.

b) Montrons qu'ne boule ouverte $\mathcal{B}(a,r)$ est un ouvert pour d. Montrons que tout point de $\mathcal{B}(a,r)$ appartient à une boule $\mathcal{B}(x,r')$ incluse dans $\mathcal{B}(a,r)$.

$$x \in \mathcal{B}(a,r) \implies d(a,x) < r$$

On a donc $r - d(a,x) > 0$, donc il existe r' réel $0 < r' < r - d(a,x)$. Considérons la boule de centre x et de rayon r' et montrons qu'elle est incluse dans $\mathcal{B}(a,r)$.

$$y \in \mathcal{B}(x,r') \implies d(x,y) < r'$$

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) \implies d(a,y) \leq d(a,x) + r'$$

or

$$r' < r - d(a,x) \implies r' + d(a,x) < r \implies d(a,y) < r \implies y \in \mathcal{B}(a,r)$$

donc

$$\mathcal{B}(x,r') \subset \mathcal{B}(a,r)$$

Conclusion : $\mathcal{B}(a,r)$ est un ouvert.

c) Soit $\mathcal{B}$ une boule fermée et $\mathcal{C}$ son complémentaire. Montrons que le complémentaire est un ouvert.

$$x \in \mathcal{C} \implies x \notin \mathcal{B}(a,r) \implies d(a,x) > r$$

$$d(a,x) - r > 0 \implies \exists r' \in \mathbb{R} \qquad 0 < r' < d(a,x) - r$$

Considérons la boule ouverte $\mathcal{B}(x,r')$ et montrons qu'elle est incluse dans $\mathcal{C}$

$$y \in \mathcal{B}(x,r') \implies d(x,y) < r'$$

$$d(a,y) + d(y,x) \geq d(a,x) \implies d(a,y) \geq d(a,x) - d(x,y)$$

or

$$d(x,y) < r' \implies -d(x,y) > -r' \implies d(a,x) - d(x,y) > d(a,x) - r'$$

Comme

$$0 < r' < d(a,x) - r \implies r < d(a,x) - r'$$

On a finalement

$$d(x,y) > r \implies y \in \mathcal{C}$$

En résumé

$$\mathcal{B}(x,r') \subset \mathcal{C}$$

et donc $\mathcal{C}$ est un ouvert.

Conclusion : Les boules fermées sont des fermés.

5) Soit d et d' deux distances équivalentes. Montrons que les ouverts de d sont les mêmes que les ouverts de d'.

d et d' étant équivalentes, il existe deux réels positifs k et k' tels que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad k \cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq k' \cdot d(x,y)$$

Adoptons la notation suivante $\mathcal{B}_d$ désigne une boule ouverte pour la distance d et $\mathcal{B}_{d'}$ désigne une boule ouverte pour la distance d'.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert pour d, montrons que c'est un ouvert pour d'.

$$\forall x \in \mathcal{O} \qquad \exists r > 0 \qquad \mathcal{B}_d(x,r) \subset \mathcal{O}$$

Autrement dit

$$\forall y \in \mathcal{B}_d(x,r) \qquad y \in \mathcal{O} \quad \text{et} \quad d(x,y) < r$$

Considérons la boule ouverte $\mathcal{B}_{d'}(x, k \cdot r)$ pour la distance d'.

$$y \in \mathcal{B}_{d'}(x, k \cdot r) \implies d'(x,y) < k \cdot r \implies k \cdot d(x,y) \leq d'(x,y) < k \cdot r$$

donc

$$k \cdot d(x,y) < k \cdot r \implies d(x,y) < r \implies y \in \mathcal{B}_d(x,r) \implies y \in \mathcal{O}$$

Il en résulte

$$\mathcal{B}_{d'}(x, kr) \subset \mathcal{O}$$

On a donc trouvé une boule pour la distance d' de centre x et incluse dans $\mathcal{O}$, ce qui fait de $\mathcal{O}$ un ouvert pour la distance d'.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert pour la distance d', montrons que c'est un ouvert pour la distance d.

$$\forall x \in \mathcal{O} \qquad \exists r > 0 \qquad \mathcal{B}_{d'}(x,r) \subset \mathcal{O}$$

Autrement dit

$$\forall y \in \mathcal{B}_d(x,r) \qquad y \in \mathcal{O} \quad \text{et} \quad d'(x,y) < r$$

Considérons la boule ouverte $\mathcal{B}_d(x, k'r)$ pour la distance d.

$$y \in \mathcal{B}_d\left(x, \frac{r}{k'}\right) \implies d(x,y) < \frac{r}{k'} \cdot r \implies d'(x,y) \leq k' \cdot d(x,y) < r$$

donc

$$d'(x,y) < r \implies y \in \mathcal{B}_{d'}(x,r) \implies y \in \mathcal{O}$$

Il en résulte

$$\mathcal{B}_d\left(x, \frac{r}{k'}\right) \subset \mathcal{O}$$

On a donc trouvé une boule pour la distance d de centre x et incluse dans $\mathcal{O}$, ce qui fait de $\mathcal{O}$ un ouvert pour la distance d.

b) Cherchons des distances non équivalentes sur $\mathbb{R}$. Considérons

$$d(x,y) = |x-y| \qquad \text{et} \qquad d'(x,y) = \frac{|x-y|}{|x-y|+1}$$

Supposons que ces deux distances soient équivalente. Il existe alors k et k' deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad k \cdot d(0,x) \leq d'(0,x) \leq k' \cdot d(0,x)$$

Ce qui s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad k|x| \leq \frac{|x|}{|x|+1} \leq k'|x|$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad k \leq \frac{1}{|x|+1} \leq k'$$

Il vient alors

$$\frac{1}{k'} - 1 \geq |x| \geq \frac{1}{k} - 1$$

Ce qui est absurde. Les deux distances ne sont donc pas équivalentes.

6a) Soit (u_n) une suite de Cauchy pour la distance d, montrons qu'elle est de Cauchy pour la distance d'. Etant une suite de Cauchy pour d nous avons :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall p > n_0, q > n_0 \qquad d(u_p, u_q) < \epsilon$$

Montrons que la suite est de Cauchy pour d'. Soit donc $\epsilon > 0$. (u_n) étant de Cauchy pour la distance d, il existe n_0 tel que

$$\forall p > n_0 \forall q > n_0 \qquad d(u_p, u_q) < \frac{\epsilon}{k'}$$

Or

$$d'(u_p, u_q) \leq k' \cdot d(x, y)$$

donc

$$d'(u_p, u_q) \leq k' d(u_p, u_q) \leq k' \cdot \frac{\epsilon}{k'} \implies d'(u_p, u_q) < \epsilon$$

En résumé

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p > n_0, \forall q > n_0 \qquad d'(u_p, u_q) < \epsilon$$

La suite (un) est donc une suite de Cauchy pour la distance d'.

On montre de la même façon qu'une suite de Cauchy pour la distance d' est de Cauchy pour la distance d en utilisant cette fois la majoration

$$d(u_p, u_q) \leq \frac{1}{k} d'(u_p, u_q)$$

Conclusion : d et d' étant deux distances équivalentes les suites de Cauchy sont les mêmes pour d et d'.

b) La distance $d(x, y) = |x - y|$ muni $\mathbb{R}$ d'un structure topologique appelée topologie usuelle de $\mathbb{R}$. N'importe quele distance équivalent à cette distance conduira à la même topologie et donc aux mêmes propriétés topologique, notamment, la convergence des suites, les limites, la continuité la dérivabilité etc...