Exercice - M0304C

I) Etude de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

1) Domaine de définition

Recherchons les valeurs qui annulent le dénominateur, donc les racines de l'équation du second degré.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

2 est racine évidente. Le produit des racines permet d'obtenir la deuxième racine

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \implies 2 \times x_2 = \frac{6}{1} \implies x_2 = 3$$

On en déduit le domaine de définition

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}}$$

2) Etudions les limites aux bornes du domaine de définition.

Etude à l'infini.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}$$

Nous avons évidement

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

On en déduit

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Etude en 3

Le tableau de signe du dénominateur $x^2 - 5x + 6$ est le suivant

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par ailleurs, les limites du numérateur et du dénominateur sont les suivantes

$$\lim_{x \to 3} x^2 - 3x + 2 = 3^2 - 3 \times 3 + 2 = 2 \qquad \lim_{x \to 3^-} x^2 - 5x + 6 = 0^- \qquad \lim_{x \to 3^+} x^2 - 5x + 6 = 0^+$$

On en déduit

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$

Alternativement, nous aurions pu écrire

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)} \cdot \frac{1}{(x-3)}$$

Sous cette forme, la limite s'étudie aisément, puisque la première fraction prend la valeur 2 que l'étude des limites de $\dfrac{1}{x-3}$ est triviale.

Etude en 2

Les limites du numérateur et du dńominateur sont les suivantes

$$\lim_{x\to 2} x^2-3x+2 = 2^2-3\times 2+2 = 0 \qquad \lim_{x\to 2^-} x^2-5x+6 = 0^+ \qquad \lim_{x\to 2^+} x^2-5x+6 = 0^-$$

Nous obtenons donc une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Nous devons donc lever l'indétermination. 2 annule le numérateur nous pouvons donc mettre $(x-2)$ en facteur. Il vient alors

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)}$$

et donc

$$f(x) = \frac{x-1}{x-3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2;3\}$$

Sous cette forme, nous avons immédiatement

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -1$$

Conclusion

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x\to 2} f(x) = -1 \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

Nous en déduisons l'existence d'une asymptote horizontale et d'une asymptote verticale dont les équations sont respectivement

$$y = 1 \qquad x = 3$$

Par ailleurs en 2 la fonction est prologeable par continuité en posant $f(2) = -1$.

3) Etudions les variations de la fonction

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x-3)(x^2-5x+6)-(2x-5)(x^2-3x+2)}{(x^2-5x+6)^2} \\
&= \frac{2x^3-10x^2+12x-3x^2+15x-18-2x^3+6x^2-4x+5x^2-15x+10}{(x^2-5x+6)^2} \\
&= \frac{-2x^2+8x-8}{(x^2-5x+6)^2} \\
&= \frac{-2(x^2-4x+4}{(x^2-5x+6)^2} \\
&= \frac{-2(x-2)^2}{(x-2)^2(x-3)^2} \\
&= \frac{-2}{(x-3)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-3)^2}$$

f' est donc manifestement négative. La fonction est monotone décroissante, sur chaque intervalle de son domaine de définition. Nous en déduisons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert\vert$	$-$	$\vert\vert$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1 $\vert\vert$ -1	$\searrow$	$-\infty$ $\vert\vert$ $+\infty$	$\searrow$	1

Remarque : compte-tenu de l'étude des limites, nous aurions pu remarquer que

$$\forall x \neq 3 \qquad f(x) = \frac{x-1}{x-3} \implies f'(x) = \frac{-2}{(x-3)^2} \qquad \text{fonction homographique}$$

4) Courbe représentative

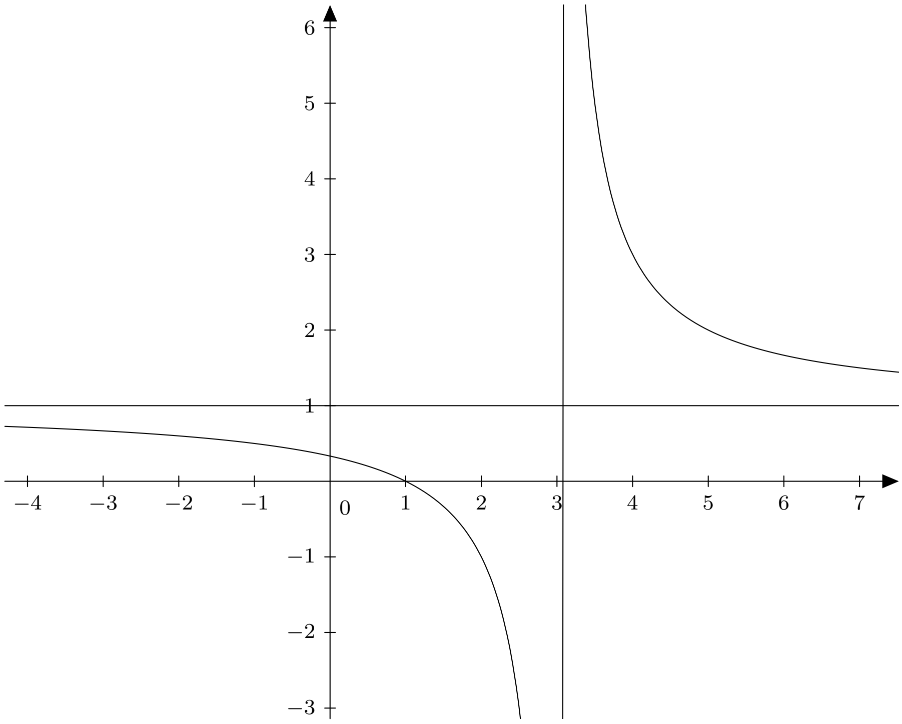

FIGURE 1 – Representation graphique de f et de ses asymptotes