Exercice - M0306C

On considère le pôlynome :

$$P(z) = 2z^3 + (-1+2i)z^2 + iz - i$$

et (E) l'équation $P(z) = 0$.

1) Montrons que l'équation (E) admet une solution réel x_0. Cherchons donc un réel a tel que $P(a) = 0$.

$$P(a) = 2a^3 + (-1+2i)a^2 + ix_0 - i = (a^3 - a^2) + i(a^2 + a - 1) = 0$$

On doit donc avoir

$$a^2(2a-1) = 0 \qquad \text{et} \qquad a^2 + a - 1 = 0$$

La première équation se résout immédiatement : $a = 0$ ou $a = \dfrac{1}{2}$. La résolution de la deuxième équation est tout aussi simple.

$$x^2 + x - 1 = 0 \implies \Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 \implies x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc, nécessairement $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion : l'équation (E) admet une solution réel $x_0 = \dfrac{1}{2}$

Remarque : alternativement, on peut tenter de trouver une racine évidente et d'essayer quelques valeurs. La factorisation du polynome à la question 3, suggère d'essayer la valeur $\dfrac{1}{2}$. On a alors

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2^3} + (-1+2i)\frac{1}{2^2} + i\frac{1}{2} - i = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i + i\frac{1}{2}\frac{1}{2} - i = 0$$

2) Montrons que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0. Cherchons donc un nombre de la forme bi tel que $P(bi) = 0$.

$$P(bi) = 2b^3i^3 + (-1+2i)(bi)^2 + ibi - i = -2b^3i + b^2 - 2b^2i - b - i = (b^2 - b) - i(2b^3 + 2b^2 - 1)$$

On doit donc avoir

$$b(b-1) = 0 \qquad \text{et} \qquad 2b^3 + 2b^2 1 + 1 = 0$$

La première équation est immédiate, $b = 0$ ou $b = 1$. La deuxème un peu moins, mais nous pouvons vérifier que les solutions de la première ne sont pas solution de la seconde... et donc que l'équation (E) n'ademet pas de solution imaginaire pure.

Conclusion : l'équation (E) n'admet pas de solutions imaginaire pure.

3) Recherchons une factorisation de $P(z)$.

$$P(z) = 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(az^2 + bz + c) = (2z-1)(az^2 + bz + c)$$

En développant il vient

$$P(z) = 2az^3 + (2b - a)z^2 + (2c - b)z - c$$

Par identification des coefficients

$$a = 1 \qquad 2b - a = -1 + 2i \qquad 2c - b = i \qquad -c = -i$$

D'ou

$$a = 1 \qquad b = i \qquad c = i$$

Nous en déduisons la factorisation de $P(z)$

$$P(z) = (2z-1)(z^2+iz+i)$$

La factorisation du pôlynome du second degré à coefficients complexes n'a rien de simple... Posons

$$Q(z) = z^2+iz+i = \left(z+\frac{i}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + i = \left(z+\frac{i}{2}\right)^2 - \frac{-1-4i}{4}$$

Cherchons δ tels que $\delta^2 = -1-4i$. Posons $\delta = x+iy$, Il vient

$$\delta^2 = x^2 - y2 + 2izy = -1-4i \implies x^2-y^2 = -1 \qquad \text{et} \qquad 2xy = -4$$

Résolvons le système d'équation

$$\begin{cases} x^2 - y2 &= -1 \\ 2xy &= -4 \end{cases}$$

par substitution, on obtient

$$y = -\frac{2}{x} \qquad x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = -1$$

Ce qui nous conduit à

$$x^4 + x^2 - 4 = 0$$

Résolvons cette équation bicaré.

$$\Delta = 1^2 - 4\times 1 \times (-4) = 17$$

$$x^2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \qquad\qquad x^2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

Finalement

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \quad \text{ou} \quad x_2 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \quad \text{ou} \quad x_3 = -i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \quad \text{ou} \quad x_4 = i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}}$$

Calculons maintenant y

$$y^2 = x^2 + 1 \implies y^2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$$y = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \qquad \text{ou} \qquad y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$$

Parmi toutes les valeurs possible de δ retenons la valeur

$$\delta = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$$

On vérifie aisément que $\delta^2 = -1-4i$. Revenons à la factorisation.

$$P(z) = \left(z+\frac{i}{2}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)^2}{4}$$

et finalement

$$Q(z) = \left(z + \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)\right)\left(z + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)\right)$$

Conclusion : la factorisation de $P(z)$ est

$$P(z) = (2z-1)\left(z + \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)\right)\left(z + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)\right)$$

4) Nous pouvons maintenant résoudre l'équaiton $P(z) = 0$. On aboutit après factorisation a une équation produit nuls. Les solutions sont :

$$z_0 = \frac{1}{2}$$
$$z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} + i\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)$$
$$z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} + i\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)$$