Exercice - M0307

1 f_1 est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2+1)$$

Etudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variation.

2) n est un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$$

a) Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0;+\infty[$.

c) Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $0 < \alpha_n < 1$.

3) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

4) Etude de la suite (α_n).

a) Démontrer que la suite (α_n) est croissante.

b) Déduisez-en qu'elle est convergente.

c) Utiliser l'éxpression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ pour déterminer la limite de la suite (α_n).