Exercice - M0308

On considère l'ensemble des fonctions f_n de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^n t \cdot e^{x \sin t} \mathrm{d}t$$

I - On se propose d'étudier la fonction f_0.

1. Pour démontrer que f_0 est dérivable pour x_0 quelconque de $\mathbb{R}$:
   a) Montrer en appliquant la formule de Taylor à la fonction u :
   $$x \longrightarrow u(x) = e^{x \sin t}$$
   que pour toute valeur x de $\mathbb{R}$, $t \in [0; 2\pi]$, on a :
   $$e^{x \sin t} = e^{x_0 \sin t} + (x - x_0) \sin t \cdot e^{x_0 \sin t} + (x - x_0)\alpha(x, t)$$
   avec
   $$|\alpha(x, t) < \frac{1}{2}|x - x_0|e^{|x|+|x_0|}$$
   b) Montrer que pour toute valeur x de $\mathbb{R}$, on a :
   $$f_0(x) = f_0(x_0) + (x - x_0)f_1(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$$
   avec
   $$|\epsilon(x)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \cdot e^{|x|+|x_0|}$$
   Que peut-on en conclure quant à la dérivabilité de f_0 et à sa fonction dérivée ?
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x \sin t)\mathrm{d}t$$
   $$f_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \text{ sh } (x \sin t)\mathrm{d}t$$
   b) Montrer pour $x \geq 0$ les inégalités :
   $$f_0(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x \sin t)\mathrm{d}t \geq \frac{2}{3} \text{ ch } \frac{\pi}{2}$$
   $$f_1(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \text{ sh } (x \sin t)\mathrm{d}t \geq \frac{1}{3} \text{ sh } \frac{\pi}{2}$$
3. Etudier les variations de f_0 et les branches infinies de sa courbe représentative $\mathcal{C}_{f_0}$; donner l'allure de $\mathcal{C}_{f_0}$.

II - On se proposer de déterminer le développement limité de f_0 à l'ordre p au voisinage de 0.

1. Déterminer une relation de réccurence liant $f_n(0)$ et $f_{n-2}(0)$ pour $n \geq 2$; en déduire $f_n(0)$ suivant la parité de n.
2. Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée. (On pourra utiliser les résultats de I.1).
3. Montrer que f_0 admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0 et expliciter ce développement.