Exercice - M0308C

Corrigé provisoire

On considère l'ensemble des fonctions f_n de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sin^n t \cdot e^{x \sin t} \mathrm{d}t$$

I - On se propose d'étudier la fonction f_0.

1) Montrons que f_0 est dérivable pour x_0 quelconque de $\mathbb{R}$.

1a) Appliquons la formule de Taylor Lagrange à la fonction $u(x) = e^{x \sin t}$ pour les points x et x_0. La fonction u est deux fois dérivable à dérivée continue. En effet,

$$u(x) = e^{x \sin t} \qquad u'(x) = \sin t \cdot e^{x \sin t} \qquad u''(x) = \sin^2 t \cdot e^{x \sin t}$$

Donc

$$u(x) = u(x_0) + (x - x_0)u'(x_0) + (x - x_0)u''(y) \qquad y \in]x; x_0[$$

Autrement dit

$$e^{x \sin t} = e^{x_0 \sin t} + (x - x_0) \sin t \cdot e^{x_0 \sin t} + (x - x_0)^2 \frac{\sin^2 t \cdot e^{y \sin t}}{2!} \qquad 0 \leq |y - x_0| \leq |x|$$

En posant

$$\alpha(x, t) = \frac{u''(y)(x - x_0)}{2!} \qquad \frac{u''(y)(x - x_0)^2}{2!} = (x - x_0)\alpha(x, t)$$

et donc

$$e^{x \sin t} = e^{x_0 \sin t} + (x - x_0) \sin t \cdot e^{x_0 \sin t} + (x - x_0)\alpha(x, t)$$

Il reste à trouver une majoration du reste. Nous avons

$$|\alpha(x, t)| = \left| \frac{u''(y)(x - x_0)}{2} \right| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|| \sin^2 t \cdot e^{x \sin t} \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \cdot e^{x \sin t}$$

Enfin

$$-1 \leq \sin t \leq 1 \implies$$

et donc

$$|\alpha(x, t)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \cdot e^{|x|+|x_0|}$$

Conclusion : pour toute valeur x de $\mathbb{R}$, $t \in [0; 2\pi]$, on a :

$$\boxed{e^{x \sin t} = e^{x_0 \sin t} + (x - x_0) \sin t \cdot e^{x_0 \sin t} + (x - x_0)\alpha(x, t)}$$

avec

$$|\alpha(x, t) < \frac{1}{2}|x - x_0|e^{|x|+|x_0|}$$

1b) Montrons que pour toute valeur x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f_0(x) = f_0(x_0) + (x - x_0)f_1(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad |\epsilon(x)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \cdot e^{|x|+|x_0|}$$

Intégrons sur l'interavalle $[0; 2\pi]$ l'égalité établie à la question précédente. Nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \sin t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x_0 \sin t} \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x - x_0) \sin t \cdot e^{x_0 \sin t} \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x - x_0)\alpha(x, t) \mathrm{d}t$$

Autrement dit

$$f_0(x) = f_0(x_0) + (x - x_0)f_1(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \epsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(x,t)\mathrm{d}t$$

Donc

$$|\epsilon(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(x,t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\alpha(x,t)|\mathrm{d}t$$

En utilisant la majoration de $\alpha(x,t)$ de la question précédente, il vient :

$$|\epsilon(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}|x - x_0|e^{|x|+|x_0|}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}|x - x_0|e^{|x|+|x_0|}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}|x - x_0|e^{|x|+|x_0|}2\pi$$

et donc

$$|\epsilon(x)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|e^{|x|+|x_0|}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_0(x) = f_0(x_0) + (x - x_0)f_1(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad |\epsilon(x)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|e^{|x|+|x_0|}}$$

Nous en déduisons

$$\frac{f_0(x) - f_0(x_0)}{x - x_0} = f_1(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$$

Compte-tenu de la majoration précédente, nous avons immédiatement

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_0(x) - f_0(x_0)}{x - x_0} = f_1(x_0)$$

Conclusion : $\boxed{f_0 \text{ est dérivable et } f_0'(x_0) = f_1(x_0)}$.

2a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ch }(x \sin t)\mathrm{d}t$$

Nous avons :

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\sin t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{x\sin t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} e^{x\sin t}\mathrm{d}t$$

Dans la deuxième intégrale effectuons le changement de variable $t' = t - \pi$, il vient :

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{x\sin t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{x\sin(t'+\pi)}\mathrm{d}t' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{x\sin t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-x\sin t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (e^{x\sin t} + e^{-x\sin t})\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2 \text{ ch }(x\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \text{ch }(x\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ch }(x\sin t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{ch }(x\sin t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Dans la deuxième intégrale, effectuonss le changement de variable $t' = \pi - t$ et $\mathrm{d}t' = -\mathrm{d}t$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \text{ ch } (x\sin(\pi - t')\mathrm{d}t' \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{f_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t}$$

Montrons de même que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t$$

Nous avons :

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t \cdot e^{x\sin t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{x\sin t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \sin t \cdot e^{x\sin t}\mathrm{d}t$$

Dans la deuxième intégrale effectuons le changement de variable $t' = t - \pi$, il vient :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{x\sin t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(t' + \pi) \cdot e^{x\sin(t'+\pi)}\mathrm{d}t' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{x\sin t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-x\sin t}\mathrm{d}t' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin t \cdot e^{x\sin t} - \sin t \cdot e^{-x\sin t})\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2\sin t \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Dans la deuxième intégrale, effectuonss le changement de variable $t' = \pi - t$ et $\mathrm{d}t' = -\mathrm{d}t$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(\pi - t) \text{ sh } (x\sin(\pi - t'))\mathrm{d}t' \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{f_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t}$$

2a) Montrons que

$$f_0(x) \geq \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t \geq \frac{2}{3} \text{ ch } \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f_1(x) \geq \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t \geq \frac{1}{3} \text{ sh } \frac{\pi}{2}$$

Nous avons

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^0 t \cdot e^{x\sin t}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t$$

et donc

$$f_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t$$

La fonction cosinus hyperbolyque est toujours positive, donc

$$f_0(x) \geq \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } (x\sin t)\mathrm{d}t$$

Or, la fonction cosinus hyperbolique est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \implies \frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1 \implies \text{ ch } (x\sin t) \geq \text{ ch } \frac{x}{2}$$

donc

$$f_0(x) \geq \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ ch } \frac{x}{2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \text{ ch } \frac{x}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\pi} \text{ ch } \frac{x}{2} \cdot \frac{2\pi}{6} = \frac{2}{3} \text{ ch } \frac{x}{2}$$

De même

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^1 t \cdot e^{x\sin t}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t$$

et donc,

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t \cdot \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t$$

Sur l'intervalle d'intégration, nous avons $\sin t \geq 0$ et $x\sin t \geq 0$ puisque $x \geq 0$, donc

$$f_1(x) \geq \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \text{ sh } (x\sin t)\mathrm{d}t$$

Or la fonction sinus hyperbolique est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ donc

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \implies \frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1 \implies \sin t \cdot \text{ sh } (x\sin t) \geq \frac{x}{2} \cdot \text{ sh } \frac{x}{2}$$

$$f_1(x) \geq \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \text{ sh } \frac{x}{2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{ sh } \frac{x}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{ sh } \frac{x}{2} \cdot \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3} \text{ sh } \frac{x}{2}$$

Conclusion :

$$\boxed{f_0(x) \geq \text{ ch } \frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad f_1(x) \geq \frac{1}{3} \text{ sh } \frac{x}{2}}$$

3) Etudions les variations de f_0 et les branches infinies de sa courbe représentative. Les résultats précédement obtenus nous indiquent que :

- $f_0(x)$ est paire.
- $f_0(0) = 1$
- qu'elle est croissante sur sur $[0, +\infty$. En effet :

$$x \geq 0 \implies \sin t \cdot \text{ sh } (x\sin t \geq 0 \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\implies f_1(x) > 0$$

– Sa limite en plus l'infini est plus l'infini. En effet :

$$\lim_{x\to+\infty} \text{ch } x = +\infty \quad \text{et} \quad f_0(x) \geq \frac{2}{3} \text{ ch } \frac{x}{2} \implies \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$$

D'ou le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0'(x) = f_1(x)$		$-$	$\vert$	$+$	
$f_0(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

II On se propose de déterminer le développement limité de f_0 au voisinage de 0.

1) Etablisons une relation de reéccurence entre $f_n(0)$ et $f_{n-2}(0)$. Par définition

$$f_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^n t \cdot e^{0\sin t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^n t\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t \sin^{n-1} t\mathrm{d}t$$

Intégrons par partie

$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos t \sin^{n-1} t\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\cos t)(n-1)\sin^{n-2} t \cos t\mathrm{d}t$$

et donc

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{2\pi}(n-1)\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^{n-2} t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}(n-1)\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\sin^{n-2} t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}(n-1)\int_0^{2\pi} \sin^{n-2} t\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}(n-1)\int_0^{2\pi} \sin^2 t)\sin^{n-2} t\mathrm{d}t \\
&= (n-1)f_{n-2}(0) + (n-1)f_n(0)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 2 \qquad nf_n(0) = (n-1)f_{n-2}(0)}$$

On en déduis immédiatement pour n pair et

$$f_n(0) = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2\cdot 1}f_0(x)$$

et pour n impair

$$f_n(0) = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2\cdot 1}f_1(x)$$

Le calcul de $f_0(0)$ et $f_1(0)$ est immédiate

$$f_0(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 1 \qquad f_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t\ \mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{2\pi} = 0$$

Conclusion :

$$f_n(0) = \frac{n!}{2^p p!^2} \quad n = 2p \qquad f_n(0) = 0 \quad n = 2p+1$$

2) Montrons que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons sa dérivée.

$$\begin{aligned}
\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin t)^n \cdot e^{(x+h)\sin t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin t)^{\cdot} e^{x\sin t}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin t)^n \cdot \frac{e^{(x+h)\sin t} - e^{x\sin t}}{h}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En passant à la limite, il vient

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{h\to 0}(\sin t)^n\cdot\frac{e^{(x+h)\sin t}-e^{x\sin t}}{h}\mathrm{d}t$$

et finalement

$$f_n'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin t)^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\sin t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin t)^n e^{x\sin t}\sin t\mathrm{d}t$$

Conclusion : f_n est dérivable et sa dérivée est

$$\boxed{f_n'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin t)^{n+1}e^{x\sin t}\mathrm{d}t=f_{n+1}(x)}$$

3) La dérivabilité de f_n pour tout n entraine l'existence d'un développement limité en 0.

$$\begin{aligned}f_0(x)&=f_0(0)+f_0'(0)x+\frac{f_0''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f_0^{(p)}}{p!}x^p+x^p\epsilon(x)\\&=\sum_{k=0}^{h}\frac{f_k(0)}{k!}x^k\end{aligned}$$