**Exercice - M0309**

**Définition :** Une application $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{\infty}$ est dite absolument monotone sur l'intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geq 0$ sur $I$.

**1a)** Quelles sont les exponentielles absolument monotones sur $\mathbb{R}$ ?

**b)** Soit $f_{\alpha,\beta}\colon x \longrightarrow \dfrac{\alpha x + \beta}{x-1}$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ et $\beta$ pour que $f_{\alpha,\beta}$ soit absolument monotone sur $]0,1[$.

**c)(i)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montre qu'il existe un unique polynôme réel $P_n$ tel que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan^{(n)}(x) = P_n\left(\tan(x)\right)$$

**(ii)** Montrer que $P_n$ a des coefficients entiers naturels, et conclure que l'application tan est absolument monotone sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

**2)** Soit $f(x) = \arcsin(x)$, $x \in [0,1]$

**a)** Montrer que : $\forall x \in [0,1[$, $(1-x^2)f''(x) - x \cdot f'(x) = 0$

**b)** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1[ \quad (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$

**c)** Montrer que $f$ est absolument monotone sur l'intervalle $[0,1[$.

**3a)** Soient $f$ et $g$, deux fonctions absolument monotones sur un intervalle $I$, et $\lambda, \mu$ deux réels $\geq 0$.
Montrer que la fonction $\lambda f + \mu g$ est absolument monotone sur $I$. par

**b)** Les fonctions absolument monotones sur $I$ forment-elles un espace vectoriel, lorsque l'on munit leur ensemble des lois usuelles.

**4a)** Soient $f$ et $g$, deux fonctions absolument monotones sur un intervalle $I$.
Montrer que $f \cdot g$ est absolument monotone sur $I$.

**b)** En déduire que l'application $x \longrightarrow \tan^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, est absolument monotone sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

**5a)** Soient$f\colon I \longrightarrow J$ et $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$, deux applications absolument monotones sur les intervalles $I$ et $J$ respectivement.
Montrer que $g \circ f$ est absolument monotone sur $I$.
**Indication :** On pourra montrer que $(g \circ f)^{(n)} \geq 0$ sur $I$ par réccurence sur $n$.

**b)** Montrer que si $f$ est absolument monotone sur un interavlle $I$, $e^f$ l'est aussi. Y-a-t-il une réciproque ?

**c)** Retrouver le résultat de la question 4b) sur l'application $x \longrightarrow \tan^n(x), \quad n \in \mathbb{N}$.

**d)** Donner un exemple de deux fonctions $f$ et $g$ pour lesquelles $f \circ g$ est absolument monotone mais pas $g \circ f$.

**6)** Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application absolument monotone. Soient $x$ et $a$, deux réels. On pose

$$S_n(a,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

**a)** On suppose $x \geq a$. Montrer que la suite $(S_n(a,x))$ est croissante.

**b)** En appliquant convenablement les inégalités de Taylor-Lagrange, montrer que $(S_n(a,x))$ est majorée par $f(x)$ et conclure que cette suite converge.

**c)(i)** On suppose maintenant $x \leq a$et on pose $y = 2a - x$. Montrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad |S_p(a,x) - S_q(a,x)| \leq |S_p(a,y) - S_q(a,y)|$$

**(ii)** Conclure que la suite $(S_n(a,x))$ converge encore si $x \leq a$.

**d)(i)** Soient $a$ et $x$, deux réels. Justifier l'inégalité :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{K_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |x-a|^{n+1}$$

ou $K_{n+1} = f^{(n+1)}(x)$ si $x \geq a$ et $K_{n+1} = f^{(n+1)}(a)$ si $x \leq a$.

**(ii)** En déduire que $(S_n(a,x))$ converge vers $f(x)$.

On a donc obtenu le résultat suivant : Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application absolument monotone. Alors :

$$\forall (a,x) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Une telle fonction, développable en série entière, est dite analytique sur $\mathbb{R}$.

**7)** Soit à nouveau $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application absolument monotone. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $f^{(p)}(x_0) = 0$.

**a)** Montrer que $\forall k \geq p, \forall x \in ]-\infty, x_0], \quad f^k(x) = 0$

**b)** En déduire que $f$ est un polynome constant positif sur $\mathbb{R}$.

**8)** Soit $f\colon ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction absolument monotone sur $]a,b[$, ou $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que l'on peut prolonger $f$ en une fonction de classe $C^\infty$, absolument monotone sur $[a,b[$.

**b)** A-t-on la même propriété sur $]a,b]$.

**9)** Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
On rappelle que $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des application des $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $h$, rélle $\geq 0$, on définit l'application $\Delta_h\colon \mathbb{R}^\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{R}$ par :
$\Delta_h(f)\colon x \longrightarrow f(x+h) - f(x)$ si $f$ est un élément de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

**a)** Montrer que si $f$ est absolument monotone, $\Delta_h(f)$ l'est aussi.

**b)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta_h^n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \cdot f(x+jh)$

ou $\Delta_h^n$ désigne la composée $\Delta_h \circ \Delta_h \circ \cdots \circ \Delta_h$ ($n$ facteurs).

**c)** En déduire que si $f$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta_h^n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \cdot f(x+jh) \geq 0$$

**10)** Réciproque $\Delta_h^n(f)(x) > 0 \implies f^{(n)}(x)$ monotone