Exercice - M0314

Le but de l'exercice est de donner les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + \frac{1}{6}\int_0^x f(t)(x-t)^3 \mathrm{d}t$$

On procède pour cela par analyse synthèse, et on suppose dans la suite que f est une solution du problème.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Montrer que pour tout $i \in [0;3]$, la fonction
$$x \longrightarrow \int_0^x \varphi(t) \times t^i \mathrm{d}t$$
est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (on pourra raisonner par réccurence). En déduire que f admet DL à l'ordre 3.

2. (a) Donner la valeur de $f(0)$.

   (b) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\eta;\eta]$, $\quad |f(x)| \leq 1$.

   (c) En déduire que si $x \in [-\eta;\eta]$
$$\left|\int_0^x f(x) \times (x-t)^3 \mathrm{d}t\right| \leq \frac{x^4}{4}$$

3. Montrer, à l'aide des questions 1. (a) et 2. (c), que $f'(0) = 1$ et que $f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$.
4. Al'aide de la formule de Taylor reste intégral, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x \left(f(t) - f^{(4)}(t)\right) \times (x-t)^3 \mathrm{d}t = 0$$
5. Rappeler pourquoi f admet une primite sur $\mathbb{R}$. En déduire l'existence d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^4$ telle que $g^{(4)} = f$.
6. On se donne donc $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$ telle que $g^{(4)} = f$.

   (a) A l'aide de la formule de Taylor reste intégral appliquée à $h = g - f$, montrer que $g - f$ est un polynome de degré inférieur ou égal à 3.

   (b) En déduire la dérivée quatrième de $g - f$. Montrer finalement que $f = f^{(4)}$.

7. On admet[1] qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a\sin x + b\cos x + ce^x + de^{-x}$$
Exprimer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$ en fonction de a, b, c, d. En déduire les valeurs de a, b, c, d à l'aide des questions 2. (a) et 3. Donner finalement l'unique solution éventuelle du problème. La synthèse est immédiate et donc admise[2].

1. Cela décolule directement de la question précédente, mais il n'y a pas d'équa-diffs en ECS...
2. Les curieux pourront la démontrer chez eux