Exercice - M0314C

Le but de l'exercice est de donner les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + \frac{1}{6}\int_0^x f(t)(x-t)^3 \mathrm{d}t$$

On procède pour cela par analyse synthèse, et on suppose dans la suite que f est une solution du problème.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. La fonction $\varphi_i(x) = \varphi(x)x^i$ est également de classe $\mathcal{C}^n$. Pour tout $i \in [0;3]$, la fonction

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t) \times t^i \mathrm{d}t = \int_0^x \varphi_i(t)\mathrm{d}t$$

ψ est une primitive de la fonction $x \longrightarrow \varphi(x)x^i$ et donc

$$\psi'(x) = \varphi(x)x^i$$

Conclusion : ψ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

(b) Montrons par réccurence que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La propriété est vraie au rang 0, puisque par hypothèse, la fonction f est continue. Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire f est de classe $\mathcal{C}^n$. Montrons qu'elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Nous avons, en développant $(x-t)^3$

$$f(x) = x + \frac{1}{6}\int_0^x \varphi(t)(x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - t^3)\mathrm{d}t$$

et donc

$$f(x) = x + \frac{1}{6}\left[x^3\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t - 3x^2\int_0^x \varphi(t)t\mathrm{d}t + 3x\int_0^x \varphi(t)t^2\mathrm{d}t + \int_0^x \varphi(t)t^3\mathrm{d}t\right]$$

D'après la question précedente, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Conclusion : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. (a) Calculons $f(0)$.

$$f(0) = 0 + \frac{1}{6}\int_0^0 f(t)(x-t)^3\mathrm{d}t = 0$$

Conclusion : $f(0) = 0$

(b) Montrons qu'il existe un intervalle centré sur 0 tel que sur cet intervalle $f(x)$ soit majorée par 1. f étant continue en 0, nous avons

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x - 0| < \eta \implies |f(x) - f(0)| < \epsilon$$

En prenant $\epsilon = 0$ nous obtenons,

$$\exists \eta > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| < \eta \implies |f(x)| \leq 1$$

Conclusion : il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [-\eta;\eta]$ $f(x) \leq 1$.

(c) Montrons que

$$x \in [-\eta;\eta] \implies \left|\int_0^x f(t)(x-t)^3\mathrm{d}t\right| \leq \frac{x^4}{4}$$

Nous avons

$$\forall x \in [-\eta;\eta] \qquad \left|\int_0^x f(t)(x-t)^3 \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |f(t)(x-t)^3|\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x |f(t)|\cdot|(x-t)^3|\mathrm{d}t$$
$$\leq \int_0^x |(x-t)^3|\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x (x-t)^3\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{(x-t)^4}{4}\right]_0^x$$
$$= \frac{x^4}{4}$$

Conclusion

$$\forall x \in [-\eta;\eta] \qquad \left|\int_0^x f(t)(x-t)^3 \mathrm{d}t\right| \leq \frac{x^4}{4}$$

3) La question 2c reviens à dire que l'intégrale est négligeble devant x^3 au voisinage de zéro. Autrement, l'équation intégrale proposée peut être réécrite

$$f(x) = x + o(x^3)$$

C'est un développement limité de f à l'ordre 3. Le développement limité étant unique, nous en déduisons

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f^{(3)}(0) = 0$$

4) Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^x \left(f(t) - f^{(4)}(t)\right) \times (x-t)^3\mathrm{d}t = 0$$

Ecrivons un développement de Taylor avec reste intégral de la fonction f en zéro.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t)\mathrm{d}t$$

Expression qui devient, compte-tenu de la question précédente

$$f(x) = x + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t)\mathrm{d}t$$

Or

$$f(x) = x + \frac{1}{6}\int_0^x f(t)(x-t)^3\mathrm{d}t$$

Donc

$$x + \frac{1}{6}\int_0^x f(t)(x-t)^3\mathrm{d}t = x + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t)\mathrm{d}t$$

Et, après simplification

$$\int_0^x f(t)(x-t)^3\mathrm{d}t = \int_0^x f^{(4)}(t)(x-t)^3\mathrm{d}t$$

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^x \left(f(t) - f^{(4)}(t)\right) \times (x-t)^3\mathrm{d}t = 0$$

5) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue. Elle est donc Riemann intégrable et admet une primitive sur $\mathbb{R}$. La primitive étant elle-même dérivable et donc continue est également intégrable et ainsi de suite. On en déduit donc l'existence d'une fonction g telle que $g^{(4)} = f$.

Conclusion : il existe une fonction g telle que $g^{(4)} = f$.

6. (a) Considérons la fonction $h = g - f$. Ecrivons la formule de Taylor avec reste intégral en zéro de la fonction h.

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2!}x^2 + \frac{h^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}h^{(4)}(t)\mathrm{d}t$$

En explicitant $h = g - f$ et en tenant compte $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$, nous obtenons

$$g(x) - f(x) = g(0) + (g'(0) - 1)x + fracg''(0)2!x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\left(g^{(4)}(t) - f^{(4)}(t)\right)\mathrm{d}t$$

Or $g^{(4)} = f$ et donc

$$g(x) - f(x) = g(0) + (g'(0) - 1)x + fracg''(0)2!x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\left(f(t) - f^{(4)}(t)\right)\mathrm{d}t$$

D'après la question 4), l'intégrale est nulle et l'expression devient

$$h(x) = g(x) - f(x) = g(0) + (g'(0) - 1)x + fracg''(0)2!x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

Conclusion : la fonction h est un polynome de degré au plus 3.

(b) Montrons que $f = f^{(4)}$. La fonction h étant un polynome de degré 3, sa dérivé 4^{eme} est nulle. Donc

$$h^{(4)} = g^{(4)} - f^{(4)} = f - f^{(4)} = 0$$

Conclusion : $f = f^{(4)}$

7) On suppose l'existence de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a\sin x + b\cos x + ce^x + de^{-x}$$

Calculons les dérivées successives de f

$$\begin{aligned} f(x) &== a\sin x + b\cos x + ce^x + de^{-x} \\ f'(x) &= a\cos x - b\sin x + ce^x - de^{-x} \\ f''(x) &= -a\sin x - b\cos x + ce^x + de^{-x} \end{aligned}$$

$$f^{(3)}(x) = -a\cos x + b\sin x + ce^x - de^{-x}$$

Pour $x = 0$, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & & b & + & c & + & d & = 0 \\ & a & + & & & c & - & d & = 1 \\ & & - & b & + & c & + & d & = 0 \\ - & a & & & + & c & - & d & = 0 \end{array}\right.$$

La résolution est simple.

$$\begin{array}{ll} (1)-(2) & b = 0 \\ (1)+(3) & c + d = 0 \\ (2)-(4) & 2a = 1 \\ (2)+(4) & c - d = \frac{1}{2}(\end{array}$$

On a alors $2c = \frac{1}{2}$ et finalement

$$a = \frac{1}{2} \qquad b = 0 \qquad c = \frac{1}{4} \qquad d = -\frac{1}{4}$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} = \frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \text{ sh } x)$$