

Exercice - M0315

Quelques suites simples présentant des propriétés originales et simples à démontrer, pour un élève de lycée. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq -1$ et de premier terme u_0 .

1. On pose

$$v_n = u_n + u_{n+1} \quad w_n = u_n \cdot u_{n+1} \quad t_n = \frac{w_n}{v_n}$$

Quelle est la nature de la suite t_n ?

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+4} = u_n$.