Exercice - M0315C

1) Déterminons la nature de la suite (t_n). Nous avons les définitions suivantes. (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq -1$ et de premier terme u_0. Les suites $(v_n), (w_n)$ et (t_n) sont définie par :

$$v_n = u_n + u_{n+1} \qquad w_n = u_n \cdot u_{n+1} \qquad t_n = \frac{w_n}{v_n}$$

Calculons t_{n+1}

$$t_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_{n+1} \cdot u_{n+2}}{u_{n+1} + u_{n+2}}$$

Or (u_n) est géométrique, donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n \qquad u_{n+2} = qu_{n+1} = q^2 u_n$$

On obtient

$$t_{n+1} = \frac{qu_n \cdot qu_{n+1}}{qu_n + qu_{n+1}} = q\frac{u_n \cdot u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}} = q\frac{w_n}{v_n} = qt_n$$

La suite (t_n) est une suite géométrique de raison q. Calculons t_0.

$$t_0 = \frac{w_0}{v_0} = \frac{u_0 u_1}{u_0 + u_1} = \frac{qu_0^2}{(1+q)u_0} = \frac{q}{1+q}u_0$$

Conclusion : (t_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $t_0 = \dfrac{q}{1+q}u_0$

2) Soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+4} = u_n$. Calculons les termes successifs de la suite.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \\
u_{n+2} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} - 1}{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} + 1} = \frac{u_n - 1 - u_n - 1}{u_n - 1 + u_n + 1} = \frac{-2}{2u_n} = -\frac{1}{u_n}
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$u_{n+4} = -\frac{1}{u_{n+2}} = -\frac{1}{-\dfrac{1}{u_n}} = u_n$$

Conclusion : la suite (u_n) vérifie pour tout n légalité $u_{n+4} = u_n$