Exercice - M0316C

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ \mathrm{d}t$.

(a) Déterminons une relation simple entre I_{n+2} et I_n.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \sin t \ \mathrm{d}t \\
&= \left[-\sin^{n+1} t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^n t \cos t(-\cos t) \ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^n t \cos^2 t \ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(1-\sin^2 t) \ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ \mathrm{d}t(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} \ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)I_n - (n+1)In+2
\end{aligned}$$

Donc

$$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)In+2 \implies (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq 2 \qquad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(b) Calculons I_0 et I_1.

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 t \ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \\
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ \mathrm{d}t = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1
\end{aligned}$$

Conclusion

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad I_1 = 1$$

Donnons maintenant une expression de I_n. Distinguons les cas n pair et n impair.

Pour n pair, nous avons

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \qquad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} I_0$$

Et plus généralement pour $n = 2p$

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)\cdot(2p-3)\cdot \ \cdots \ \cdot 3 \cdot 1}{2p \cdot (2p-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 4 \cdot 2} I_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} I_0$$

De même pour $n = 2p+1$

$$I_{2p+1} = \frac{2p \cdot (2p-2) \cdot \ \cdots \ \cdot 4 \cdot 2}{(2p+1)\cdot(2p-1)\cdot \ \cdots \ \cdot 3 \cdot 1} I_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} I_1$$

Conclusion

$$n = 2p \qquad I_n = \frac{(2p)!\pi}{2 \cdot (2^p p!)^2} \qquad\qquad n = 2p+1 \qquad I_n = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

(c) Montrons que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Nous avons

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leq \sin x \leq 1$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leq \sin^n x \leq 1$$

On en déduit que

$$\sin^n x \sin x \leq \sin^n x \times 1$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \ \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ \mathrm{d}t$$

Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{n+1} \leq I_n$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Montrons que la suite $(n+1)I_nI_{n+1}$ est stationnaire. Supposons n pair, $n+1$ est alors impair. On a alors, compte tenu de $n = 2p$

$$(n+1)I_nI_{n+1} = (2p+1)\frac{(2p)!}{(2^pp!)^2}I_0 \times \frac{(2^pp!)^2}{(2p+1)!}I_1 = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$$

De même, si n est impair et $n+1$ pair, $n = 2p-1 = 2(p-1)+1$ et $n = 2p$

$$(n+1)I_nI_{n+1} = 2p\frac{(2^{p-1}(p-1)!)^2}{(2p-1)!}I_1 \times \frac{(2p)!}{(2^pp!)^2}I_0 = 2p\frac{2p}{(2p)^2}I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$$

Conclusion : la suite $(n+1)I_nI_{n+1}$ est stationnaire

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

(d) Déduisons la formule de Wallis. La suite (I_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Soit ℓ sa limite. Nous avons alors

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_nI_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(n+1)I_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{(2^pp!)^2}{(2p)!\sqrt{2p}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$$

(a) Montrons que la série de terme général u_n converge.

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\dfrac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}}\right) = \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)e}{(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) \\
&= \ln\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= 1 - \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - 14n^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

La série de terme général $(|u_n|)$ est donc absolument convergente puisque équivalente à $\frac{1}{4n^2}$.

(b Nous en déduisons la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vers un réel ℓ qui est strictement positif. En effet, considérons la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln(a_{n+1}) - 1$$

On en déduit

$$\ln(a_{n+1} = 1 + S_n$$

et en passant à la limite, compte-tenu de la convergence de la série de terme général (u_n).

$$\lim_{n\to\infty} \ln(a_{n+1}) = 1 + \lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1 + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Et donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{1+\lambda} = \ell > 0$$

Conclusion : la suite (a_n) converge vers un réel ℓ strictement positif.

Déterminons ℓ.

$$\begin{aligned}
\frac{a_n^2}{a_{2n}} &= \frac{\left(\dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)^2}{\dfrac{(2n)!e^{2n}}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}} = \left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)^2 \cdot \frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!e^{2n}} \\
&= \frac{n!^2e^{2n}2^{2n}n^{2n}\sqrt{2}\sqrt{n}}{n^{2n}n(2n)!e^{2n}} = \frac{n!^2(2^n)^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}} \\
&= 2\frac{(2^nn!)!}{(2n)!\sqrt{2n}}
\end{aligned}$$

Au facteur 2 près on retrouve la formule de Wallis. On en déduit la limite aisément. En effet, d'une part

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{\ell^2}{\ell} = \ell$$

d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{(2^n n!)!}{(2n)!\sqrt{2n}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

Conclusion

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

(c) Nous en déduisons la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

En effet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \implies \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim \sqrt{2\pi} \implies n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi}$$

Conclusion :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

3. Déterminons la limite de la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$. C'est une application directe de la formule de Stirling

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \implies \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \sim \frac{\sqrt[n]{2\pi n}}{e}$$

Le numérateur a pour limite 1, en effet, en pasant au logarithme, il vient

$$\ln(\sqrt[n]{2\pi n} = \frac{1}{n}\ln(2\pi) + \frac{\ln n}{n} \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\pi n} = 1$$

Conclusion

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$