Exercice - M0319C

Une puce se déplace sur les sommets d'un quadrilatère. A chaque saut, elle passe aléatoirement d'un sommet à l'autre avec la même probabilité. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de sauts pour visiter les quatres sommets. On cherche à déterminer la loi de probabilité de X. Il faut au minimum 3 étapes pour visiter tous les sommets du quadrilatères à condition de ne jamais revenir sur l'un des sommets déja visité. Nous en déduisons $X(\Omega) = \{n | n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3\}$

Introduisons Y la variable donnant le nombre de saut pour visiter 3 sommets du quadrilatère. Au départ la puce est sur un des sommets, le nombre de sommets visités est donc 1. A l'étape suivante le nombre de sommet visité est 2. Considérons lévénement visiter le troisième sommet. C'est une épreuvement de Bernouilli dont la probabilité de succès est $\frac{2}{3}$, la probabilité de visiter l'un des sommets restants. La variable aléatoire $Y-1$ représente le nombre d'étape pour visiter le troisième sommet. $Y-1$ donc une loi géométrique

$$Y - 1 \simeq Geom(p) \qquad p = \frac{2}{3} \qquad q = 1 - p = \frac{1}{3}$$

Donc

$$p(Y - 1 = k) = q^{k-1}p = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Nous obtenons finalement la loi de probabilité de Y

$$p(Y = k) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{2}{3^{k-1}}$$

Considérons maintenant la probabilité conditionnelle de l'évenement $X = n$ sachant que $Y = k$, autrement dit la probabilité de visiter le dernier sommet à la n^{eme} étape, sachant que les trois premiers sommets ont été visités en k étapes. On doit donc calculer la proabilité de visiter le dernier sommets en $n - k$ sauts. Or visiter le dernier sommet constitue à nouveau une épreuve de Bernouilli dont la proabilité de succès est $\frac{1}{3}$. La variable aléatoire donnant le nombre de saut pour visiter le dernier sommet suit donc une loi géométrique. On en déduit immédiatement que

$$p_{Y=k}(X = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} \frac{1}{3}$$

Les événements $Y = k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $2 \leq k \geq n - 1$ constitue un système complet d'événement. D'après la formule des probabilités totales nous avons

$$\begin{aligned}
p(X = n) &= \sum_{k=2}^{n-1} p(Y = k) \times p_{Y=k}(X = n) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} \frac{1}{3} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2^{n-k}}{3^{n-1}} \\
&= \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{k=2}^{n-1} 2^{n-k} \\
&= \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{j=n-2}^{1} 2^{j} \\
&= \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{j=1}^{n-2} 2^{j} \\
&= \frac{1}{3^{n-1}} 2 \frac{1 - 2^{n-2}}{1 - 2} \\
&= \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}
\end{aligned}$$

Conclusion : la loi de probabilité de X est donnée par

$$p(X=k) = \frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} \qquad l \in \mathbb{N} \quad k \geq 3$$