

### Exercice - M0320

On désigne par  $N$  un entier naturel écrit en base dix. On appelle  $S$  la somme de ses chiffres.

1. Démontrer que  $N$  est divisible par 9 si et seulement si  $S$  est divisible par 9.
2. On suppose que  $A = 2012^{2012}$ ; on désigne par
  - $B$  la somme des chiffres de  $A$
  - $C$  la somme des chiffres de  $B$
  - $D$  la somme des chiffres de  $C$
  - a) Démontrer que  $5^6 = 1 \pmod{9}$
  - b) En déduire que  $A \equiv 7 \pmod{9}$ , puis que  $D \equiv 7 \pmod{9}$
3. Sachant que  $2012 < 10\,000$ , démontrer que  $A$  s'écrit en numération décimale avec au plus 8048 chiffres. En déduire que  $B < 72\,432$ .
4. Démontrer que  $C \leq 43$ .
5. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de  $D$  plus petit que 15.
6. Démontrer que  $D = 7$