**Exercice - M0320C**

**1)** Soit $N$ un entier naturel et $a_0, a_1, \cdot, a_n$ ses chiffres dans son écriture en base 10 et $S$ la somme de ses chiffres. Autrement dit

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \qquad S = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Or $10 = 9 \times 1 + 1$ (division euclidienne par 9) donc

$$10 \equiv 1 \pmod 9 \implies 10^k \equiv \pmod 9$$

On en déduit

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\} a_k 10^k \equiv a_k \pmod 9$$

et par sommation

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \pmod 9 \qquad\qquad N \equiv S \pmod 9$$

En résumé un nombre entier $N$ est congru à la somme de ses chiffres en base dix. On en déduit immédiatement que $N$ est divisible par 9 si et seulement si $S$ est divisible par 9. En effet, dire que $N$ (ou $S$) est divisible par 9 revient à dire que $N$ (ou $S$) est congru à zéro modulo 9. Donc $S$ (ou $N$) est congru à zéro modulo 9.

Conclusion : Un entier est divisible par 9 si et seulement la somme de ses chiffres (en base 10) est divisible par 9.

**2)** On pose $A = 2012^{2012}$, $B$ la somme des chiffres de $A$, $C$ la somme des chiffres de $B$ et $D$ la somme des chiffres de $C$. D'après le résultat précédent, nous avons

$$A \equiv B \pmod 9 \quad \text{et} \quad B \equiv C \pmod 9 \quad \text{et} \quad C \equiv D \pmod 9$$

**a)** Montrons que $5^6 \equiv 1 \pmod 9$

$$5^6 = 15\ 625 = 9 \times 1736 + 1$$

Conclusion :

$$5^6 \equiv 1 \pmod 9$$

**b)** Montrons que $A \equiv 7 \pmod 9$. Nous avons d'une part

$$2012 = 9 \times 223 + 5 \implies 2012 \equiv 5 \mod 0$$

et donc

$$2012^{2012} \equiv 5^{2012} \pmod 9$$

D'autre part

$$2012 = 6 \times 335 + 2$$

donc

$$5^6 \equiv 1 \pmod 9 \implies 5^{6\times 335} \equiv 1 \pmod 9 \implies 5^{6\times 335+2} \equiv 5^2 \pmod 9$$

Autrement dit

$$5^{2012} \equiv 25 \mod 9 \quad \text{et} \quad 25 \equiv 7 \pmod 9 \implies 5^{2012} \equiv 7 \pmod 9$$

Nous en déduisons le résultat par transitivité

$$2012^{2012} \equiv 5^{2012} \pmod 9 \quad \text{et} \quad 5^{2012} \equiv 7 \pmod 9 \implies 2012^{2012} \equiv 7 \pmod 9$$

Conclusion

$$A \equiv 7 \pmod 9$$

Nous en déduisons immédiatement le résultat pour $D$ par transitivité

$$\begin{array}{lllll} D \equiv C \pmod 9 & \text{et} & C \equiv B \pmod 9 & \Longrightarrow & D \equiv B \pmod 9 \\ D \equiv B \pmod 9 & \text{et} & B \equiv A \pmod 9 \quad \text{et} & \Longrightarrow & D \equiv A \pmod 9 \\ D \equiv A \pmod 9 & \text{et} & A \equiv 7 \pmod 9 & \Longrightarrow & D \equiv 7 \pmod 9 \end{array}$$

Conclusion

$$D \equiv 7 \pmod 9$$

**3)** Nous avons

$$2012 < 10\ 000 \implies A \leq 10^{4\times 2012} \implies A < 10^{8048}$$

La puissance de 10 est un nombre composé d'un 1 et de 8048 zéro. A lui inférieur donc a au plus8048 chiffres. La plus grande somme est obtenue pour tous les chiffres égaux à 9. Donc

$$B \leq 9 \times 8048$$

Conclusion :

$$B \leq 72\ 432$$

**4)** Compte tenu de la majoration de $B$, nous savons que $B$ a au plus 5 chiffres, que le premier est au plus 7 et les autres sont plus petits que 9. Nous obtenons donc aisément une majoration de la somme des chiffres de $B$

$$S_B \leq 7 + 4 \times 9 = 7 + 36 = 43$$

Conclusion

$$C \leq 43$$

**5)** Etudions les nombres compris entre 0 et 43. Ceux compris entre 0 et 9 ont une somme inférieur à 9, ceux entre 10 et 19 une somme inférieure à 10, ceux entre 20 et 29 ont une somme inférieure à 11, ceux entre entre 30 et 39 ont une somme inférieure à 12, enfin ceux compris entre 40 et 43 une somme inférieure à 7.

Conclusion

$$D \leq 12$$

**6)** Le seul nombre congru à 7 et inférieur à 12 est évidement 7

$$D = 7$$

Alternativement, nous pouvons trouver $D$ par la méthode suivante. $C$ est congru à 7 modulo 9 donc

$$C = 7 + 9k \qquad k \in \mathbb{N}$$

Or

$$C \leq 43 \implies 7 + 9k \leq 43 \implies k \leq 4$$

Donc

$$C = 7 + 9k \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Les valeurs de $C$ sont donc 7, 16, 25, 34, 43 et les valeurs de la somme des chiffres et toujours 7, donc $D = 7$.