Exercice - M0324

On appelle « triangle rectangle presque isoèle » un triangle rectangle dont les cotés ont des longeurs entières et dont les longueurs des deux plus petits cotés sont deux entiers consécutifs.

1. En appelant x la longueur du plus petit coté et y la longueur de l'hypothénuse, montrer qu'un triangle est un triangle rectangle presque isocèle si et seulement si
$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$
2. Déterminer le plus petit triangle rectangle presque isocèle.
3. Montrer que la longueur de l'hypoténuse est nécessairement impaire
4. Montrer que x et y sont premiers entre eux.
5. Soit A la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et B la matrice colone $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On considère la suite définie par :
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_0 = 3 \quad \text{et} \quad y_0 = 5$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le couple (x_n, y_n) définit un triangle rectangle presque isocèle.
6. Déterminer un triangle presque isocèle dont les longueurs des cotés sont supérieures à 2019

D'après l'exercice de spécialité du baccalauréat France Métropolitaine - La Réunion de juin 2017.