Exercice - M0324C

1) Considérons un triangle rectangle presque isocèle. Les longeurs des cotés sont x, $x+1$ et y pour l'hypothénuse. D'après le théorème de Pythagore

$$y^2 = x^2 + (x+1)^2 \implies y^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 \implies y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

Réciproquement

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \implies y^2 = x^2 + (x+1)^2$$

Et donc le triangle dont les longueurs des cotés sont x, $x+1$ et y et rectangle d'hypothénuse y.

Conclusion : un triangle de coté x et d'hypothénuse y est un triangle rectangle presque isocèle si et seulement si $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$

2) Déterminons le plus petit triangle rectangle presque isocèle.

$$\begin{aligned} x = 1 &\implies y^2 = 1^1 + 2^2 = 5 \qquad y = \sqrt{5} \\ x = 2 &\implies y^2 = 2^2 + 3^3 = 13 \qquad y = \sqrt{13} \\ x = 3 &\implies = y^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \qquad y = 5 \end{aligned}$$

Pour $x = 1$ et $x = 2$ y n'est pas entier. Le plus petit triangle rectangle presque isocèle correspond à $x = 3$

Conclusion : le plus petit triangle rectangle presque isocèle a pour coté 3, 4 et 5, ce qui correspond au premier triplet Pythagoricien !

3) Montrons que la longueur de l'hypothénuse et nécessairement impaire. Nous avons

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1 = 2(^x2 + x) + 1$$

y^2 est donc impaire. Or le carré d'un nombre pair et pair, donc par contraposé si le carré est impaire le nombre est impaire. Nous en déduisons que y est pair.

Conclusion : la longueur de l'hypothénuse est néccairement impaire.

4) Montrons que x et y sont premiers entre eux. Récrivons l'égalité

$$y^2 = 2x^2 + 2 + 1 \iff y^2 - 2x^2 - 2x = 1 \iff y \times y + x(-2x - 2) = 1$$

Le théorème de bezout permet de conclure.

Conclusion : x et y sont premiers entre eux.

5) On considère la suite définie par

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_0 = 3 \quad \text{et} \quad y_0 = 5$$

Autrement dit

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + 2y_n + 1 \\ y_{n+1} &= 4x_n + 3y_n + 2 \end{cases}$$

Montrons par réccurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le couple (x_n, y_n) définit un triangle rectangle presque isocèle. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $x_0 = 3$ et $y_0 = 5$ on retrouvre le plus petit triangle rectangle presque isocèle. Supposons que (x_n, y_n) définisse un triangle rectangle presque isocèle, montrons qu'il en est de même pour (x_{n+1}, y_{n+1}). Nous avons l'hypothèse

$$y_n^2 = 2x_n^2 + 2x_n + 1 \qquad \text{ou encore} y_n^2 - 2x_n^2 - 2x_n - 1 = 0$$

Calculons $E = y_{n+1}^2 - 2x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} - 1$

$$\begin{aligned}
E &= y_{n+1}^2 - 2x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} - 1 \\
&= (4x_n + 3y_n + 2)^2 - 2(3x_n + 2y_n + 1)^2 - 2(3x_n + 2y_1 + 1) - 1 \\
&= 16x_n^2 + 9y_n^2 + 4 + 24x_ny_n + 16x_n + 12y_n - 2(3x_n + 2y_n + 1)^2 - 2(3x_n + 2y_1 + 1) - 1 \\
&= 16x_n^2 + 9y_n^2 + 1 + 24x_ny_n 10x_n + 8y_n - 2(3x_n + 2y_n + 1)^2 \\
&= 16x_n^2 + 9y_n^2 + 1 + 24x_ny_n 10x_n + 8y_n - 18x_n^2 - 8y_n^2 - 2 - 24x_ny_n - 12x_n - 8y_n \\
&= y_n^2 - 2x_n^2 - 2x_n - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc

$$u_{n+1}^2 = 2x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} + 1$$

Autrement dit, le couple (x_{n+1}, y_{n+1}) définit un triangle rectangle presque isocèle.

Nous pouvons donc conclure que pour tout n entier naturel le couple (x_n, y_n) défini un triangle rectangle presque isocèle.

5) Calculons les valeurs successives de x_n et y_n.

$$\left\{\begin{array}{ll} x_0 & = 3 \\ y_0 & = 5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = 3 \times 3 + 2 \times 5 + 1 = 20 \\ y_1 & = 4 \times 3 + 3 \times 5 + 2 = 29 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_2 & = 3 \times 20 + 2 \times 29 + 1 = 60 + 58 + 1 = 119 \\ y_2 & = 4 \times 20 + 3 \times 29 + 2 = 80 + 87 + 2 = 169 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_3 & = 3 \times 119 + 2 \times 169 + 1 = 357 + 338 + 1 = 696 \\ y_3 & = 4 \times 119 + 3 \times 169 + 2 = 476 + 507 + 2 = 985 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_4 & = 3 \times 696 + 2 \times 985 + 1 = 2088 + 1970 + 1 = 4059 \\ y_4 & = 4 \times 696 + 3 \times 985 + 2 = 2784 + 2955 + 2 = 5741 \end{array}\right.$$

Ainsi le triangle dont les cotés on pour longueur 4059, 4060 et 5741 est un triangle rectangle presque isocèle.