Exercice - M0325

Théorême 1 *Pour tout couple $t_0, \alpha)$ de $I \times E$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy* $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = \alpha \end{cases}$

Dans cet énoncé, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une norme notée N, b est une application continue de I à valeur dans E et a une application continue de I à valeur dans l'algèbre normée $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes (continus) de E, muni de la norme, notée $\|\cdot\|$, subordonnée à N.

1. Soit $x \in \mathcal{C}^1(I; E)$, montrer que x est solution de $\mathcal{P}$ si et seulement si x est solution de l'équation intégrale ./
2. On pose $z_0(t) = \alpha$ pour tout t de I et, pour tout (t, n) de $I \times \mathbb{N}$

$$z_{n+1}(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} [a(u)\,(z_n(u)) + b(u)]\ \mathrm{d}u$$

   Montrer que l'on définit ainsi une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathcal{C}^0(I, E)$.

3. On considère la série de fonctions de terme général $y_n = z_{n+1} - z_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Soit J un segment inclus dans I et contenant t_0.
   a) Justifier l'existence d'un (M, k) de $(R_+)^2$ tel que pour tout u de J, on ait :

$$\|a(u)\| \leq M \qquad \text{et} \qquad N(y_0(u)) \leq k$$

   b) Montrer que pour tout t de J et tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$N(y_n(t)) \leq k \frac{M^n |t - t_0|^n}{n!}$$

   c) En déduire la convergence uniforme sur tout segment de I de la suite (z_n).
   d) Soit z la limite de la suite (z_n). Montrer que z est continue, qu'elle vérifie (P') et qu'ell est solution de $\mathcal{P}$. (On pourra montrer que la suite de fonctions $t \longrightarrow a(t)(z_n(t)) + b(t)$ converge uniformément sur tout segment de I vers $t \longrightarrow a(t)(z(t)) + b(t)$).
4. Si x_1 et x_2 sont deux fonctions continues vérifiant $\mathcal{P}$ sur I, en reprenant les notations de la question précédente, montrer que pour tout t de J et pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$N(x_1(t) - x_2(t)) \leq k' \frac{M^n |t - t_0|^n}{n!} \qquad \text{ou} \qquad k' = \|x_1 - x_2\|_{J,\infty}$$

   En déduire l'unicité annocée dans l'énoncé du théorème.