Exercice - M0335C

Quel est le chiffre des unités du plus grand nombre entier inférieur ou égale à $\dfrac{10^{1992}}{10^{83}+7}$?

Soit donc d le plus petit entier inférieur ou égal à $\dfrac{10^{1992}}{10^{83}+7}$. Nous avons

$$1992 = 83 \times 24$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{10^{1992}}{10^{83}+7} &= \frac{10^{83\times 24}}{10^{83}+7} \\
&= \frac{10^{83^{24}} - (-7)^{24}}{10^{83}+7} + \frac{(-7)^{24}}{10^{83}+7} \\
&= \frac{\left(10^{83}\right)^{24} - (-7)^{24}}{10^{83}-(-7)} + \frac{(-7)^{24}}{10^{83}+7} \\
&= \frac{1}{10^{83}-(-7)}(10^{83}-(-7)) \sum_{k=0}^{23} \left(10^{83}\right)^{23-k} (-7)^k + \frac{(-7)^{24}}{10^{83}+7} \\
&= \sum_{k=0}^{23} \left(10^{83}\right)^{23-k} (-7)^k + \frac{(-7)^{24}}{10^{83}+7}
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la factorisation de $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k$. Le premier terme de l'expression est clairement un entier et la fraction un nombre plus petit que 1. Nous en déduisons

$$d = \sum_{k=0}^{23} \left(10^{83}\right)^{23-k} (-7)^k$$

Cette somme est composée d'entier se terminant par zéro du fait des multiplication par des puissances de 10 à l'exception du terme $(-7)^{23}$ et donc nous avons

$$d \equiv (-7)^{23} \pmod{10}$$

Par ailleurs

$$-7 \equiv 3 \pmod{10} \qquad (-7)^4 \equiv 81 \pmod{10} \qquad (-7)^4 \equiv 1 \pmod{10} \qquad (-7)^{20} \equiv 1 \pmod{10}$$

Nous en déduisons

$$(-7)^{23} \equiv 3^3 \pmod{10} \qquad (-7)^{23} \equiv 27 \pmod{10} \qquad (-7)^{23} \equiv 7 \pmod{10}$$

Conclusion : le dernier chiffre du plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{10^{1992}}{10^{83}+7}$ est 7.