Exercice - M0337C

1) Montrons l'inégalité triangulaire.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |x+y| \leq |x| + |y|$$

Nous avons

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2$$

Or, par définition de la valeur absolue, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq |x|$, donc

$$xy \leq |xy| = |x| \cdot |y|$$

et donc

$$|x|^2 + 2xy + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2$$

Autrement dit

$$|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2$$
$$|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

La fonction racine carrée étant croissante, nous avons finalement

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Alternativement, nous pouvons écrire

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{et} \quad -|y| \leq y \leq |y| \implies -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Et donc

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

2) Montrons la deuxième l'inégalité triangulaire. Nous avons pour tout x et y réels

$$|x| = |x - y + y| \implies |x| \leq |x-y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x-y|$$

et

$$|y| = |y - x + x| \implies |y| \leq |y-x| + |x| \implies |y| - |x| \leq |y-x|$$

Cette dernière inégalité se réécrit

$$|x| - |y| \geq -|y-x|$$

Nous avons donc

$$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$$

Autrement dit

$$|\ |x| - |y|\ | \leq |x-y|$$

3) Récrivons les deux inégalité précente pour $-y$. Il vient

$$|\ |x| - |-y|\ | \leq |x - (-y)| \leq |x| + |-y|$$

Et donc

$$|\ |x| - |y|\ | \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

4) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons

$$(x-y)^2 \geq 0$$

Et donc

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

d'ou

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

Finalement

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad \text{ou} \qquad xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

5) Montrons que pour tout x et y réels positifs

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$$

Supposons $x \geq y$, nous avons alors successivement

$$x \geq y$$

y étant positif

$$xy \geq y^2$$

La fonction racine étant croissante

$$\sqrt{xy} \geq y$$
$$-2\sqrt{xy} \leq -2y$$
$$x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - y$$
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq \sqrt{x - y}$$

Et comme $x - y \geq 0$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq \sqrt{|x - y|}$$

Examinons maintenant le cas $x \leq y$

$$x \leq y$$
$$x^2 \leq xy$$
$$x \leq \sqrt{xy}$$
$$-2x \geq -2\sqrt{xy}$$
$$-x + y \geq x - 2\sqrt{xy} + y$$
$$-(x - y) \geq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

Or $x - y \leq 0$ donc $|x - y| = -(x - y)$, et donc

$$|x - y| \geq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

Autrement dit

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq |x - y|$$

Conclusion : dans tous les cas nous avons l'inégalité demandée

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \qquad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq |x - y|$$

6) Montrons l'inégalité de Bernouilli par réccurence. Pour $n = 2$, nous avons

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

Or

$$x^2 > 0 \implies 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$

et donc

$$(1 + x)^2 > 1 + 2x$$

Supposons que $(1+x)^n > 1+nx$, montrons que $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

En utilisant l'hypothèse de réccurence

$$(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x)$$

Il vient

$$(1+x)^{n+1} > (1+nx+x+nx^2$$

puis

$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$$

La propriété est donc héréditaire. Nous pouvons alors conclure

$$\forall n > 1 \qquad (1+x)^n > 1+nx$$