Exercice - M0338

Montrer les inégalités suivantes :

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz. E est un espace vectoriel euclidien.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2 \qquad |x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

2. Inégalité de Minkowski. E est un espace vectoriel euclidien.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2 \qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3. Inégalité d'Young. Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls. p et q deux réels strictement positifs conjugués, c'est-à-dire tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

4. Inégalité de Holder cas continus. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\Delta)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\Delta)$ avec $p > 1$ et q conjugués.

$$\int_\Delta |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Delta |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Delta |g(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}$$

5. Inégalité de Holder cas discret.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

6. Inégalité de Minkowski dans $\mathcal{L}^p(\Delta)$