Exercice - M0340

Il s'agit de construire une série de fonctions dont la somme est continue sur $\mathbb{R}$ et n'est dérivable pour aucun réel. La première question donne le critère qui permettra d'établir la non-dérivabilité, la deuxième donne un motif qui permettra de constuire dans la troisième la série. Enfin dans la quatrième on établit le résultat.

1. Soit F une fonction définie sur un intervalle I et x de I tel que F soit dérivable en x. Soient (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs dans I de limite commune x telles que (a_n) soit croissante, (b_n) décroissante et $b_n - a_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n} = F'(x)$
2. Pour x de $\mathbb{R}$ on pose $g(x) = \min(x - E(x), E(x)+1-x)$, ou $E(x)$ désigne la fonction partie entière.
   Vérifier que g est 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ et donner sa représentation graphique sur le segment $[-1, 2]$.
   Que représente $g(x)$ pour x par rapport à $\mathbb{Z}$?
3. Pour x de $\mathbb{R}$ on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$
   Montrer que f est continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$.
4. Soit x de $[0, 1[$ de développement décimal propre $x = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{x_p}{10^p}$, c'est-à-dire que la suite $(x_p)_{p\geq 1}$ est à valeur dans $[\![0, 9]\!]$ et telle que pour tout q de $\mathbb{N}^\star$ il existe un $p \geq q$ tel que $x_p \neq 9$. Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$ on pose $a_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^p}{10^p}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$
   (a) Préciser $g(10^k a_n)$ et $g(10^k b_n)$ pour tout $k \geq n$
   (b) On suppose dans cette question que $k < n$ et on pose $r = 10^k \sum\limits_{p=1}^{k} \frac{x^p}{10^p}$
      i Vérifier que $r \in \mathbb{N}$ et montrer que $10^k a_n \geq r + \frac{x_{k+1}}{10}$
      ii Montrer que $10^k b_n \leq r + \frac{x_{k+1}+1}{10}$. (on pourra commencer par calculer $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10î}$)
      iii En distinguant les cas $x_{k+1} \in [\![0, 4]\!]$ et $x_{k+1} \in [\![5, 9]\!]$, montrer qu'il existe un α_k dans $\{-1, 1\}$ tel que
      $$g(10^k b_n) - g(10^k a_n) = \alpha_k 10^k (b_n - a_n)$$
   (c) En déduire que f n'est pas dérivable en x.
5. Conclure.