Exercice - M0344C

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et trois vecteurs

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 \begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}$$

Construire une base orthormée par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

Vérifions d'abord que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\1 & 0 & 3\\0 & 1 & -4\end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & -1 & -2\\0 & 1 & -4\end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 1 & -11\end{vmatrix}$$

La famille de vecteur (u_1, u_2, u_3) est de rang 3, c'est bien une famille libre.

$$\|u_1\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2} \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad e_1 \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$$

Déterminons e_2. Cherchons d'abord v_2 orthogonal à e_1

$$v_2 = u_2 + \lambda e_1 \qquad v_2 \cdot e_1 = 0 \implies \lambda + u_2 \cdot e_1 = 0 \implies v_2 = u_2 - (u_2 \cdot e_1)e_1$$

$$u_2 \cdot e_1 = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \times 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\0-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

On en déduit e_2

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$$

Déterminons e_2. Cherchons v_3 orthogonal à e_1 et à e_2.

$$v_3 = u_3 + \lambda e_1 + \mu e_2 \qquad v_3 \cdot a_1 = 0 \implies \lambda = -u_3 \cdot e_1 \qquad v_3 \cdot e_2 = 0 \implies \mu = -u_3 \cdot e_2$$

$$v_3 = u_3 - (u_3 \cdot e_1)e_1 - (u_3 \cdot e_2)e_2$$

$$u_3 \cdot e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 5 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 3 + 0 \times (-4) = 4\sqrt{2}$$

$$u_3 \cdot e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \times 5 + \frac{-1}{\sqrt{6}} \times 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times (-4) = \frac{5-3-8}{\sqrt{6}} = -\frac{6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}$$

Donc

$$v_3 = \begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix} - 4\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix} + \sqrt{6}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-4+1\\3-4-1\\-4+0+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\|v_3\| = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

On en déduit e_3

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est une famille orthonormée (ou orthonormale)

$$e_1 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$