

Exercice - P0007C

Soit m la masse du pendule et l sa longueur. Appelons θ l'angle du pendule avec la verticale. Le bilan des forces est

- Le poid \vec{P}
- La tension de la corde \vec{T}

Le référentiel terrestre est considéré comme Galiléen. Le principe fondamental de la dynamique donne

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

L'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

L'énergie potentielle de pesanteur, s'exprime en fonction de z la hauteur de la masse.

$$E_p = mgz$$

Le système est conservatif, l'énergie mécanique est constante

$$E_m = E_c + E_p = Cte$$

Il vient

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta = Cte$$

En dérivant par rapport au temps

$$\frac{1}{2}ml^2 \times 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

qui se simplifie en

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Pour les petites oscillations $\sin \theta \sim \theta$ d'où

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

La solution est de la forme

$$\theta = \theta_m \cos \omega t + \phi$$

avec

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Conclusion

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$