Exercice - P0020C

On considère une masse m est suspendue à un ressort vertical de raideur k. Calculons la période des oscilations.

1) Lois de Newton

Le référentiel sera supposé galiléen (l'expérience se passe sur terre). Les forces sont les suivantes

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- La force de rappel du ressort $\vec{F}$
- Les forces de frottement de l'air que nous négligerons

Le principe fondamental de la dynamique s'ecrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_e xt$$

Pour une masse m constante il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F}$$

Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire dirigé suivant la verticale ascendante, et O la position d'équilibre du ressort. Exprimons les différentes forces, dans le repère $(O, \vec{i})$.

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{i}$$

Pour la force de rappel du ressort, l'intensité est proportionnelle à l'alongement du ressort. Compte tenu du choix d'orientation, nous avons

$$\vec{F} = k(\ell - \ell_0)\vec{i}$$

A l'équilibre nous avons

$$\vec{P} + \vec{F} = -mg\vec{i} + k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{i} = \vec{0} \implies mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \qquad (1)$$

Soit M le point représentant la position de la masse.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$$

L'élongation du ressort est alors

$$\ell = \ell_{eq} - x$$

et la force de rappelle s'exprime

$$\vec{F} = k(\ell - \ell_0)\vec{i} = k(\ell_{eq} - \ell_0 - x)\vec{i}$$

Le principe fondamentale de la dynamique devient donc

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\vec{i} + k(\ell_{eq} - \ell_0 - x)\vec{i}$$

En projection sur l'axe $O\vec{i}$, il vient

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -mg + k(\ell_{eq} - \ell_0 - x)$$

et compte-tenu de l'égalité (1)

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -mg + k(\ell_{eq} - \ell_0) - kx = -kx$$

D'ou l'équation différentielle du mouvement

$$m\ddot{x} + kx = 0 \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficient constant. Posons $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$. Les solutions sont de la forme

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

On en déduit la période des oscilations

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Conclusion

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

2) Approche énergétique

L'énégie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle de pesanteur est

$$E_p = mgx + E_0$$

L'énergie potentielle élastique du ressort est

$$E_e = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(\ell_{eq} - \ell_0 - x)^2$$

En négligeant les forces de frottement, le système est conservatif. Donc

$$E_c + E_p + E_e = Cte$$

Donc

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx + E_0 + \frac{1}{2}k(\ell_{eq} - \ell_0 - x)^2 = Cte$$

En dérivant par rapport au temps, il vient

$$\frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + mg\dot{x}\frac{1}{2}k2(\ell_{eq} - \ell_0 - x)(-\dot{x}) = 0$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + mg\dot{x} - k(\ell_{eq} - \ell_0)\dot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) + kx) = 0$$

En compte-tenu de (1), il vient

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

On retrouve la même équation différentielle que précédement et donc la même période pour les oscilations.