Exercice - P0025C

Etablissons dans un premier temps l'équation de Laplace pour un gaz parfait dans les variables P et V. Le gaz parfait est régit par son équation d'état

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

et d'autre part ses propriétés énergétiques. Notamment l'énergie interne et l'enthalpie ne dépendent que de la température. D'ou

$$\mathrm{d}U = mc_v\mathrm{d}T \qquad \mathrm{d}H = mc_P\mathrm{d}T$$

Or

$$H = U + PV = U + \frac{m}{M}RT$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} + \frac{mR}{M}$$

$$mc_p = mc_v\mathrm{d}T + \frac{mR}{M}$$

On retrouve déjà la relation de Mayer dans le cas particulier du gaz parfait.

$$Mc_p - Mc_v = R$$

Pour une masse de gaz parfait, subissant une transformation adiabatique nous avons

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q = \delta W = -p\mathrm{d}V$$

d'ou

$$-p\mathrm{d}V = mc_v\mathrm{d}T$$

or l'équation d'état nous conduit à

$$T = \frac{M}{mR}PV \implies \mathrm{d}T = \frac{M}{mR}(\mathrm{d}PV + V\mathrm{d}P)$$

Il vient

$$-P\mathrm{d}V = mc_v\frac{M}{mR}(V\mathrm{d}P + V\mathrm{d}P)$$

puis

$$\frac{Mc_v}{R}V\mathrm{d}P + \left(\frac{Mc_v}{R} + 1\right)P\mathrm{d}V = 0$$

$$\frac{Mc_v}{R}V\mathrm{d}P + \left(\frac{Mc_v + R}{R}\right)P\mathrm{d}V = 0$$

$$\frac{Mc_v}{R}V\mathrm{d}P + \left(\frac{Mc_p}{R}\right)P\mathrm{d}V = 0$$

$$c_v\frac{\mathrm{d}P}{P} + c_p\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

La loi de Laplace s'écrit dont

$$PV^\gamma = Cte$$

En différentiant l'équation d'état, nous obtenons

$$V\mathrm{d}P + P\mathrm{d}V = \frac{m}{M}R\mathrm{d}T \implies \frac{\mathrm{d}V}{V} + \frac{\mathrm{d}P}{P} = \frac{\mathrm{d}T}{T}$$

Il en résulte d'une part

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} + \gamma\left(\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{\mathrm{d}P}{P}\right) = 0$$

d'ou

$$\gamma\frac{\mathrm{d}T}{T} - (\gamma - 1)\frac{\mathrm{d}P}{P} = 0$$

et d'autre part

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{\mathrm{d}V}{V} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} + (\gamma - 1)\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

Conclusion : la loi de Laplace pour le gaz parfait s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}T}{T} + (\gamma - 1)\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \qquad \gamma\frac{\mathrm{d}T}{T} - (\gamma - 1)\frac{\mathrm{d}P}{P} = 0$$

Ou sous forme intégrale

$$PV^{\gamma} = Cte \qquad T^{\gamma}P^{1-\gamma} = Cte \qquad TV^{\gamma-1} = Cte$$