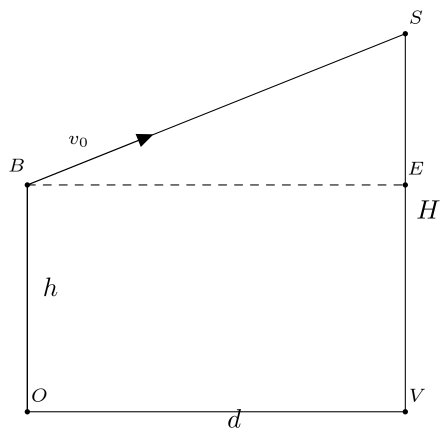
Exercice - P0054C

Un singe et un enfant jouent à la balle. Le singe assis sur une branche d'arbre voit que l'enfant lance la balle dans sa direction et, joueur intuitif, il se laisse tomber à l'instant précis du lancer afin de rattraper la balle. La balle est lancée à l'instant $t = 0$s d'une hauteur h avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$. A l'instant $t = 0$ le signe est à une auteur H. Enfin, le singe et l'enfant sont à une distance d. La situation initiale est représentée ci-dessous.



Déterminons les équations horaires du singe et de la balle. Pour ces deux systèmes, nous ne considérons que le poids, autrement dit nous étudions un mouvement de chute libre. La deuxième loi de Newton conduit, pour chaque système, à :

$$m\vec{a} = \sum F_{ext} \implies m\vec{a} = m\vec{g} \implies \vec{a} = \vec{g}$$

La détermination de l'équation horaire est alors immédiate. Prenons un repère orthormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec, $\vec{j}$ unitaire et colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{OV}$, $\vec{k}$ unitaire etcolinéaire à $\overrightarrow{OB}$ et de même sens, et enfin $\vec{i}$ unitaire tel que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit direct.

Pour le signe, c'est un mouvement de chute libre verticale selon la droite (SV). Soit N le point représentatif de la position du singe à l'instant t. Nous avons

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{ON} \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ H - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

De même, pour la balle, en désignant par M le proint représentatif de la position de la balle, il vient :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_B \begin{pmatrix} v_{0_x} \\ v_{0_y} \\ v_{0_z} - gt \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} v_{0_x} t \\ v_{0_y} t \\ h + v_{0_z} t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Le singe attrape la balle à condition qu'à une date t donnée, le singe et la balle aient la même position.

Autrement dit, on doit avoir simultanément, pour date t

$$\left\{\begin{array}{rl} v_{0_x} t & = 0 \\ v_{0_y} t & = d \\ h + v_{0_z} t - \frac{1}{2} g t^2 & = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right.$$

Recherchons les conditions sur la vitesse pour que le système ait une (ou des solutions).

- La première équation impose $v_{0_x} = 0$. Le vecteur vitesse initial de la balle doit être dans le plan, $(O, \vec{j}, \vec{k})$. Nous pouvons donc écrire $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{j} + v_0 \sin \alpha \vec{k}$.
- La deuxième équation conduit à $t = \dfrac{d}{v_{0_y}}$
- La troisième équation doit également être satisfaite donc

$$h + v_{0_z} t = H \implies h - v_{0_z} \frac{d}{v_{0_y}} = H \implies \frac{v_{0_z}}{v_{0_x}} = \frac{H-h}{d}$$

Le système a donc une solution à condition que

$$\frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \frac{H-h}{d} \implies \tan \alpha = \tan \widehat{EBS}$$

Autrement, le système a des solutions à condition que le vecteur $\vec{v}_0$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BS}$. La balle doit être lancée dans la direction du singe. C'est d'ailleurs cette situation qui a été représentée sur la figure. Dans cette situation, le système a une solution unique quelque soit la vitesse initiale v_0.

Première conclusion :

- Soit $\vec{v}_0$ n'est pas dans la direction $\overrightarrow{BS}$ et le système n'a pas de solution. Le singe ne peut pas rattraper la balle.
- Soit $\vec{v}_0$ est dans la direction de $\overrightarrow{BS}$ et le système a une solution unique et ce quelque soit la valeur de la vitesse initiale v_0.

Toutefois, le singe doit attraper la balle avant quelle ne touche le sol ce qui impose une condition supplémentaire.

$$t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \qquad x(t) = 0 \qquad y(t) = d \qquad z(t) = H - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_0 \cos \alpha}\right)^2$$

Nous devons donc avoir

$$z(t) \geq 0 \implies H - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 \geq 0 \implies v_0^2 \geq \frac{g d^2}{2H \cos^2 \alpha}$$

Nous devons donc avoir

$$v_0^2 \geq \frac{g(d^2 + (H-h)^2)}{2H}$$

Conclusion : le singe attrappe la balle a deux condition

1. La balle est lancée dans la direction du singe
2. La vitesse iniale de la balle est suffisante.

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{g(d^2 + (H-h)^2)}{2H}}$$