Exercice - P0059C

On étudie le mouvement d'un balon de foot de masse m dans le réféntiel terreste supposé Galiléen.

1) Déterminons l'équation horaire du mouvement. Le ballon est soumis à l'attraction de la pesanteur, à la poussée d'archimède et à une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse. L'application de la deuxième loi de Newton nous donne

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F}$$

Le système étant de masse constante on obtient

$$m\vec{a} = m\vec{g} + h\vec{v}$$

d'ou l'équation différentielle régissant la vitesse du mouvement

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{h}{m}\vec{v} = \vec{g}$$

La résolution de l'équation homogène est immédiate. Posons $\tau = \frac{m}{h}$. Il vient

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{g}$$

$$\vec{v}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{K}$$

Déterminons une solution particulière de l'équation avec second membre sous forme d'une fonction contante. Il vient

$$\frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{g} \implies \vec{v} = \tau\vec{g}$$

Nous en déduisons

$$\vec{v}(t) = \tau\vec{g} + e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{K}$$

Déterminons la constante $\vec{K}$. Pour $t = 0$ nous avons $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ et donc

$$\tau\vec{g} + \vec{K} = \vec{v}_0 \implies \vec{K} = \vec{v}_0 - \tau\vec{g}$$

Conclusion

$$\vec{v}(t) = (\vec{v}_0 - \tau\vec{g})\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau\vec{g}$$

En coordonnées nous avons

$$\vec{g}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0\begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v_y(t) = (v_0\sin\alpha + \tau g)e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau g \end{cases}$$

Intégrons la vitesse

$$\begin{cases} x(t) = -v_0\tau\cos\alpha e^{-\frac{t}{\tau}} + C_x \\ y(t) = -\tau(v_0\sin\alpha + \tau g)e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau g t + C_y \end{cases}$$

Pour $t = 0$, le balon est l'origine du repère.

$$\begin{cases} C_x = v_0\tau\cos\alpha e^{-\frac{t}{\tau}} \\ C_y = (\tau v_0\sin\alpha + \tau^2 g)e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau g t \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} x(t) = v_0\tau\cos\alpha\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ y(t) = (\tau v_0\sin\alpha + \tau^2 g)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - \tau g t \end{cases}$$

2) Déterminons la trajectoire du balon. Eliminons le temps entre les deux équations. A partir de l'expression de $x(t)$ nous obtenons

$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right)$$

Reportons dans l'expression de $y(t)$

$$y(t) = (\tau v_0 \sin\alpha + \tau^2 g)\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}\left(-\tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right)\right)}\right) - \tau g\left(-\tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right)\right)$$

En simplifiant, il vient

$$\begin{aligned}
y(t) &= (\tau v_0 \sin\alpha + \tau^2 g)\left(1 - \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right)\right) + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right) \\
y(t) &= (\tau v_0 \sin\alpha + \tau^2 g)\frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha} + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right) \\
y(t) &= \left(\tan\alpha + \frac{g\tau}{v_0 \cos\alpha}\right) x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : la trajectoire du balon a pour équation cartésienne

$$y(t) = \left(\tan\alpha + \frac{g\tau}{v_0 \cos\alpha}\right) x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\alpha}\right)$$